Un modo correcto de citar esta obra es:

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana.

Edición electrónica:

Edición impresa:

© Miguel Cruz Ramírez, 2006
Universidad de Holguín "Oscar Lucero Moya"
Departamento de Matemática
🖂 mcruzr@facinf.uho.edu.cu

ISBN 959-18-0137-8
Depósito Legal: 435-2006

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una de las ciencias más antiguas y, a lo largo de los años, ha sido utilizada con fines diversos. Esta ciencia es extraordinariamente dinámica y cambiante, a tal punto que sus conceptos primarios sufren transformaciones relativamente rápidas y hasta su propia concepción, aunque de modo más lento, experimenta cambios tangibles. La Matemática es un fenómeno cultural universal, pues cualquier civilización crea una Matemática. Imaginar un mundo, en el cual los cambios y la complejidad subsistentes no puedan ser organizados mentalmente en relaciones, dependencias y modelos, es ciertamente difícil. "Un mundo así constituiría un verdadero caos, una antítesis del cosmos".[1]

Definir o caracterizar qué es la Matemática constituye un complejo problema filosófico. Algunos científicos llegan a plantear cuestiones verdaderamente sorprendentes. Por ejemplo, V. Arnold ha aseverado que "[t]oda la Matemática se divide en tres partes: la Criptografía (pagada por la CIA, la KGB y semejantes), la Hidrodinámica (sostenida por constructores de submarinos atómicos) y la Mecánica Celeste (financiada por militares y otras instituciones que comercian con misiles como la NASA). […] La existencia de una relación misteriosa entre estos diferentes dominios no tiene explicación racional".[2] Aunque Arnold, al parecer, solo reconoce la matemática occidental, es positivo el hecho de resaltar las necesidades objetivas como motor impulsor de la ciencia. Además, la "relación misteriosa" puede verse en

[1] Sierpinska, A. (1998) WMY 2000: Some themes for discussion. *World Mathematical Year 2000*, Newsletter 6 of IMU, p. 1.

[2] La Criptografía comprende la Teoría de Números, la Geometría Algebraica, la Combinatoria, la Computación, etcétera; la Hidrodinámica incluye el Análisis Complejo, las Ecuaciones en Derivadas Parciales, los Grupos de Lie, etcétera; y la Mecánica Celeste abarca los Sistemas Dinámicos, el Álgebra Lineal, la Topología, el Cálculo Variacional, la Geometría Simpléxtica, etcétera. Véase Arnold, V. I. (2000) Polymathematics: Is mathematics a single science or a set of arts? In: V. Arnold et al. (Eds.) *Mathematics: frontiers and perspectives*, IMU & AMS, p. 403.

un sentido metafórico en el mejor de los casos, pues el materialismo dialéctico explica con suficiente rigor el origen de esta relación.[3]

Sin dudas la Matemática ha experimentado un crecimiento exponencial, planteando nuevos retos para enseñarla y aprenderla. En el finalizado siglo XX, con la denominada "Revolución Científico–Técnica", la correspondiente evolución didáctica alcanzó una velocidad sin precedentes, así que el abordaje de la realidad actual no es tarea sencilla. Puede decirse que esta evolución alcanzó su máximo esplendor en el último cuatridecenio, tal y como se verá en el primer capítulo.

En lo que se refiere a enseñanza–aprendizaje de la Matemática, son disímiles los temas que hoy constituyen objeto de estudio. Por ejemplo, es de peculiar interés la formación de conceptos, las creencias y concepciones, la aplicación de las herramientas computacionales, la formación del profesorado, la Ingeniería Didáctica, la Heurística, el trabajo con estudiantes de alto aprovechamiento, el desarrollo del pensamiento (en sus múltiples enfoques: lógico–formal, geométrico–espacial, combinatorio, …), la resolución de problemas, etcétera. Justamente el último campo mencionado constituye un amplio objeto de análisis, al cual se le dedicará íntegramente el presente libro.

La resolución de problemas constituye un verdadero dilema para la enseñanza de la Matemática. Cuando se habla de problemas no debe referirse a la versión trivializada de los ejercicios con texto, también acuñados como "story problems" en lengua inglesa. Por el contrario, aquí el término se refiere a situaciones verdaderamente complejas, capaces de potenciar el desarrollo del pensamiento, y de proporcionar modos de actuación para enfrentar los retos de la ciencia y la técnica. Situaciones así, son difíciles de encontrar en la práctica educativa.

Actualmente, algunos investigadores han hiperbolizado la búsqueda de tales situaciones exclusivamente en contextos prácticos. En efecto, muchas veces se espera que la enseñanza de la Matemática se base en problemas "contextualizados"; o sea, aplicables directamente a las necesidades objetivas o subjetivas del estudiante. Esto se apoya en fundamentos de naturaleza psicológica, principalmente de orden afectivo y motivacional, pasando por alto otros aspectos de naturaleza epistemológica y matemática. Por ejemplo, tratar de vincular la enseñanza de las funciones cuadráticas con la práctica, lleva muy pronto al agotado tema del lanzamiento del proyectil. La búsqueda de otros ejemplos conduce desafortunadamente a ejercicios demasiado artificiosos y, con ello, a un efecto negativo en la enseñanza. La contextualización es necesaria, siempre y cuando sea pertinente su inclusión en el salón de clases. No es posible olvidar que los contenidos matemáticos tienen también el propósito de desarrollar el pensamiento, y de sentar las bases para el aprendizaje de otros conocimientos más elevados.

Si bien la resolución de problemas ocupa un lugar central en la enseñanza de la Matemática, los saberes acumulados se encuentran dispersos, simulando en ocasiones una desconexión aparente. Ciertas obras enfocan el tema enfatizando el enfoque psicológico lo cual, si bien agota una arista importante del problema,

---

[3] Un trabajo excelente sobre la naturaleza de la Matemática puede verse en: Stewart, I. (2004) *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy* (capítulo 1, pp. 13–23). Barcelona: Crítica.

margina otros aspectos no menos importantes. Por el contrario, algunos textos han enfatizado tanto los elementos de la epistemología de la Matemática, que desatienden por completo el axioma esencial de que el proceso analizado es eminentemente humano y no puede aislarse de su esfera afectiva–motivacional.

Son disímiles las preguntas que salen a colación: ¿qué entender por problema matemático en el ámbito escolar?, ¿qué acciones tienen lugar durante la resolución de problemas?, ¿qué procesos psíquicos se asocian a esta actividad humana?, ¿qué papel juegan las creencias y concepciones que el sujeto resolverte tiene sobre la Matemática?, ¿qué relación existe entre el proceso de resolución de problemas y otros procesos como la imaginación espacial, la formulación de problemas, el razonamiento y la búsqueda de relaciones? Muy bien podrían seguirse enumerando varias preguntas más, donde cada una ha constituido el punto de mira de disímiles investigaciones. Esto es solo una muestra de cuan amplia y rica es la Didáctica de la Matemática.

El presente libro ha aceptado el reto de enfocar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas. Cada una de las cuestiones anteriores se examina procurando no herrar en disquisiciones de corte absolutista, pero sin pasar por alto la necesidad de mantener un profundo espíritu crítico. Ninguna pregunta contará con una respuesta acabada, por el contrario, cada análisis generará nuevos enigmas para investigaciones ulteriores.

Esta obra constituye un pequeño homenaje a una década de notables esfuerzos, desarrollados por muchos investigadores en el Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”. Desde la primera edición de la Maestría en Didáctica de la Matemática (en 1995) se han generado casi un centenar de investigaciones, muchas de las cuales tomaron como objeto la resolución de problemas en el contexto escolar. Las temáticas abordadas han sido diversas, pero parten de una visión objetiva de su objeto de investigación y se erigen sobre los presupuestos más nobles de la pedagogía cubana. Diez de estas investigaciones han tenido continuidad y han sido defendidas exitosamente en esta institución como disertaciones doctorales.

En su conjunto, esta obra puede servir de material de consulta para investigadores de todos los niveles, principalmente para aquellos que se inclinan por el fascinante campo de la resolución de problemas. También puede ser de utilidad para el profesorado de Matemática, tanto en formación como en servicio. En todos los casos se requiere de un estudio profundo y crítico. Si al hacer referencia a este libro, los maestros e investigadores lejos de asumir tácitamente sus consideraciones, exploran con avidez y opinión propia cualquier idea aquí abordada, entonces el objetivo será cumplido.

1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El método histórico–lógico es sumamente poderoso para desentrañar ciertas regularidades que ocurren en el objeto de estudio de cualquier ciencia. No es posible un análisis completo de la teoría sobre Resolución de Problemas (en lo adelante RP, tanto en singular como en plural) en la escuela sin su correspondiente abordaje histórico. Así, en el presente capítulo se estudiará la evolución que ha tenido la enseñanza–aprendizaje de la Matemática desde tiempos inmemoriales hasta la actualidad, con énfasis en la RP.

Un hecho significativo consiste en el desafío actual de esclarecer la naturaleza de la Didáctica de la Matemática (en lo que sigue DM), pues no existe consenso respecto a si es o no una disciplina científica. Algunos afirman categóricamente que sí, mientras otros defienden el criterio de que se trata de una especie de "confluencia" de saberes originados en diferentes campos del conocimiento científico.

Para ganar en precisión, es justo señalar que el término manejado (DM) es una traducción al castellano del término "Didactics of Mathematics", equivalente del angloamericano "Mathematics Education". Esta denominación procede de Europa Continental y cuenta con varias traducciones (Didaktik der Mathematik, Didattica della Matematica, Dydaktyka Matematyki, etcétera). Sólo en Francia (Didactique des Mathématiques) se da un caso especial con el significado del término, ya que un grupo de investigadores franceses (G. Brousseau, Y. Chevallard, entre otros) lo restringen a un fenómeno especial, cuyos conceptos claves son "situación didáctica", "contrato didáctico", "transposición didáctica", "ingeniería didáctica", etcétera. Desde esta última perspectiva, puede considerarse la obra de estos investigadores como un subconjunto (actualmente muy importante) de la DM.

Algunos autores han llegado al consenso de admitir el siglo XIX como alborada de la DM, en conexión con la institucionalización social de la escuela y el maestro, influida por el crecimiento exponencial y por los cambios metodológicos acaecidos en las matemáticas puras y aplicadas[4]. El hecho de fijar una fecha, o un siglo para ser más ortodoxo, puede ser cuestionado si se asume otro criterio de lo que realmente es la DM. Por ejemplo, para algunos investigadores rusos su respectiva historia comenzó en 1703, con la publicación de un antiguo libro de texto. ¿No podrían decir los griegos lo mismo respecto a los "*Elementos*" de Euclides? Sobre la base de esta última idea, a continuación se ensayará un análisis que se remonta más atrás de la Antigua Grecia.

§ 1.1 Los primeros trabajos

Hasta la actualidad ha llegado referencia de que, en civilizaciones tan antiquísimas como la egipcia, la babilonia y la china, se enseñaba matemática. Así, por ejemplo, los problemas matemáticos con textos son tan antiguos como la propia enseñanza de esta asignatura.

Tanto en las tablillas de barro, como en los papiros más antiguos, comúnmente pueden encontrarse problemas totalmente "idealizados". Se trata de pretextos, concebidos con el ánimo de enseñar los rudimentos aritméticos elementales. Por ejemplo, en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio antes de la Era Común (aEC) aparecen varios problemas destinados a la enseñanza de los jóvenes escribas. Uno de los problemas es el siguiente: "Una pirámide. El lado tiene 140 [codos] y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo [por codo]. ¿Cuál es la altura?"[5]

---

[4] Aproximadamente desde 1830, con la fundamentación del Análisis Matemático por A. Cauchy, el descubrimiento de las geometrías no euclideanas por N. Lobachevsky y J. Bolyai, así como la aparición del concepto de estructura algebraica, motivada por la angosta obra de E. Galoys.

[5] Se trata de un papiro de 34 siglos que decían había sido hallado en las ruinas de Tebas. Fue adquirido en 1858 por el anticuario escocés H. Rhind, en la ciudad egipcia de Luxor. El documento en un principio había sido un rollo de unos 5.5 m de largo por 33 cm de alto, pero estaba roto en dos pedazos y le faltaban algunos fragmentos. Algunos de estos fragmentos aparecieron, medio siglo más tarde, en los archivos de la Historic Society, de Nueva York. Habían sido obtenidos por el coleccionista Edwin Smith. El papiro de Rhind fue adquirido, a la muerte de éste, por el British Museum, donde se conserva en la actualidad.

El rollo consiste en un manual práctico de la matemática egipcia, escrito hacia el 1700 aEC y constituye actualmente la principal fuente de conocimientos acerca de cómo contaban, calculaban y medían los egipcios. Fue compuesto por un escriba llamado A'h–mosè en tiempos del rey hicso Ekenenre Apopi, que reinó aproximadamente entre 1788 y 1580 aEC, quien lo copió "fielmente" según se lee al comienzo del texto. El papiro de Rhind no es un tratado sino una colección de ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos. Está escrito en hierático (forma cursiva del jeroglífico) y contiene unos 85 problemas. Muestra el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones simples y de progresiones, la medición de áreas de triángulos, trapezoides y rectángulos, el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas, y por supuesto la superficie del círculo.

En general, en estos textos se inicia con una exposición del problema matemático que se trata de resolver, y los datos se presentan como cifras concretas y no como variables abstractas. A continuación se expone la forma de solucionarlo; cada nuevo paso se basa en el resultado de un paso anterior o bien en uno de los datos facilitados al principio. No se recurre a ningún argumento para justificar el procedimiento ni se da la menor explicación de la fórmula empleada. Tal y como ocurre con muchos libros de texto actuales, los problemas figuran por colecciones y, al parecer, el alumno quedaba así capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que pudiera presentársele.

J. Ritter ha señalado que "[…l]a finalidad principal de los ejercicios matemáticos escolares era familiarizar al futuro escriba con las técnicas matemáticas para resolver problemas. El objetivo que se trataba de alcanzar era la instrucción técnica y no la aplicación directa, motivo por el que muchos de los problemas aparentemente 'prácticos' que figuraban en estos textos tenían que ver muy poco con la vida real. […] *La finalidad pedagógica de estos ejercicios salta a la vista*."[6] Un ejemplo de este surrealismo matemático se aprecia el siguiente problema: "Tres veces me reduzco yo, un tercio de mí, un quinto de mí se me añade; estoy completo. ¿Cuál es el número que habla?"

Según A. H. Schoenfeld, el filósofo griego Sócrates fue capaz de aislar la noción "resolver problemas"[7] para someterla a estudios. Este hecho resulta sumamente notable para su época, tratándose del siglo V aEC. Si bien es cierto que este sabio negaba la cognoscibilidad del mundo físico y absolutizaba el hecho de que el hombre solo puede conocerse a sí mismo, hay que destacar en él ciertas reminiscencias metacognitivas.

Desde el idealismo socrático, resolver problemas era una cuestión de "recordar". Esta doctrina no puede juzgarse por su obra, pues nunca escribió nada, sino por el diálogo "Menón o de la Virtud" de su discípulo Platón.[8] En este diálogo, Sócrates ocupa a un esclavo de Menón en la solución de un problema geométrico. Realizando una serie de preguntas capciosas y haciendo correcciones muy sutiles, lo conduce a probar que en la siguiente figura $a^2 = 8$, cuando $c = 2$.

He aquí un pasaje del Diálogo:

SÓCRATES. — Dime, joven: ¿Sabes que esto es un cuadrado?[9]
ESCLAVO. — Sí.
SÓCRATES. — El espacio cuadrado, ¿no es aquel que tiene iguales las cuatro líneas que vez?
ESCLAVO. — Seguramente.
SÓCRATES. — ¿No tienes también estas otras líneas, tiradas por medio, iguales?
ESCLAVO. — Sí.

[6] Ritter, J. (1989) Las fuentes del número. *El Correo de la UNESCO*, Noviembre, p. 16 (sin itálicas).
[7] Schoenfeld, A. H. (1987) A brief and biased history of problem solving, p. 28. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.
[8] Su nombre original era Aristocles. Recibió este apodo (*Plato*) por el significado del mismo en griego: "el de anchas espaldas".
[9] Sócrates le hace ver un cuadrado que ha trazado sobre la arena; esto es PQRS en la figura 1.

SÓCRATES. — ¿No puede haber un espacio semejante más grande o más pequeño?
ESCLAVO. — Sin duda.
SÓCRATES. — Si este lado fuese de dos pies y este otro también de dos pies, ¿cuántos pies tendría el todo? Considéralo antes de esta manera. Si este lado fuese de dos pies y éste de un pie sólo, ¿no es cierto que el espacio tendría una vez dos pies?
ESCLAVO. — Sí, Sócrates.

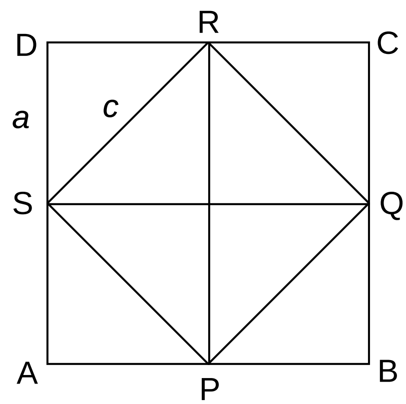

Figura 1. *Al comparar las áreas de los cuadrados ABCD y PQRS se revela que* $c^2 = 2a^2$

SÓCRATES. — Pero como este otro lado es igualmente de dos pies, ¿no tendrá el espacio dos veces dos?
ESCLAVO. — Sí.
SÓCRATES. — ¿Luego el espacio tiene dos veces dos pies?
ESCLAVO. — Sí.
SÓCRATES. — ¿Cuántos son dos veces dos pies? Dímelo después de haberlos contado.
ESCLAVO. — Cuatro, Sócrates.
SÓCRATES. — ¿No podría formarse un espacio doble que éste y del todo semejante, teniendo como él todas sus líneas iguales?
ESCLAVO. — Sí.
SÓCRATES. — ¿Cuántos pies tendría?
ESCLAVO. — Ocho.
SÓCRATES. — Vamos; procura decirme cuál es la longitud de cada línea de este otro cuadrado. Las de éste son de dos pies. ¿Dime cuántos serán las del cuadro doble?
ESCLAVO. — Es evidente, Sócrates, que serán dobles.
SÓCRATES. — Ya ves, Menón, que yo no le enseño nada de todo esto, y que no hago más que interrogarle. Él imagina ahora saber cuál es la línea con que debe formarse el espacio de ocho pies. ¿No te parece así?

MENÓN. — Sí.[10]

Como se puede observar, por su trivialidad, los “impulsos” de Sócrates desaprovechan las verdaderas potencialidades del pensamiento del esclavo. Así, cada pregunta presupone una respuesta inmediata. El intervalo que implica un razonamiento pasa desapercibido. Es notable que si bien el binomio Sócrates–Esclavo simula una relación estímulo–respuesta, de manera implícita, algo similar pasa con Sócrates–Menón (véase la última pregunta y la última respuesta).

Hay que destacar que Platón es fundador del idealismo objetivo. A diferencia de su maestro, suponía que no es posible obtener conocimiento de las cosas ni de los fenómenos sensoriales, sino tan solo formarse una “opinión” probable. Para él la fuente del conocimiento está en los recuerdos del alma inmortal del hombre antes de instalarse en el cuerpo mortal, por esto resalta la manera en que Sócrates “extrae” de la mente del esclavo un conocimiento eterno e inmutable.

En la obra de Platón no solo afloran tempranas meditaciones psicológicas como “la aptitud es una feliz disposición del alma para aprender rápidamente” y “la reflexión es la meditación laboriosa y en el silencio”, sino también ideas referidas al aprendizaje como “el arte de enseñar es el arte de dar educación” y “la educación es la cultura del alma”.[11] Todo esto muestra cuan grandioso llegó a ser el mundo griego, aun cuando estos análisis no llegaron a ser abordados “a lo Demócrito”.

La influencia de esta época llega hasta hoy de muchas maneras. Por solo poner un ejemplo, cuando Platón creó su “Academia”,[12] colocó un cartel en la entrada que advertía: “que no pase quien no sepa Geometría”. Por Geometría se entendía la Matemática de estos tiempos, así que aquél que quisiera entrar a la Academia para aprender a filosofar debía saber antes Matemática. Nada más similar a las pruebas de ingreso a las universidades actuales. Como puede observarse, desde entonces, dominar esta ciencia ha sido un indicador para medir el desarrollo del pensamiento.

Entre los más destacados matemáticos y pensadores de la antigüedad, posteriores a Platón, surgió el denominado *ars invendi* o “heurística”. Tal era el nombre de una ciencia bastante mal definida y que se relacionaba tan pronto con la lógica, como con la filosofía o la psicología. Se exponía frecuentemente los métodos geométricos, pero raras veces sus detalles, y tenía como objeto de estudio las reglas y métodos del descubrimiento u invención.[13] En el séptimo libro de sus *Collectiones*, el matemático griego Pappus (≈ s. III aEC) trata un tema que llama άναλυόμενος (analyomenos) que, según Polya[14], puede traducirse como “tesoros del análisis” o

---

[10] Platón (≈ antes del 395 aEC/1946) Menón o de la Virtud. *Obras Completas de Platón*, t. 2. Buenos Aires: Ediciones Anaconda, pp. 224–225.
[11] Ibíd. t. 4, p. 609, 614 y 616.
[12] Fundada por Platón en el año 387 aEC, en un jardín público de las afueras de Atenas cuyo propietario Academo (habitante del Ática) había donado al pueblo ateniense. Se considera a menudo como la primera universidad europea. En este recinto Platón instruyó a sus seguidores (el más grande de los cuales fue Aristóteles) en Astronomía, Biología, Matemática, Teoría Política y Filosofía.
[13] Véase Polya, G. (1945/1957) *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (p. 101). 2nd Ed., Princeton University Press.
[14] Ibíd., p. 133.

"arte de resolver problemas". Un estudio profundo de las ideas de Pappus revela que este término sirve de génesis para el concepto actual de "heurística". En este libro, Pappus describe los métodos de resolución de varios problemas geométricos, y se refiere a formas regresivas y progresivas de razonar. Sin embargo, todo esto lo hace implícitamente.[15]

Polya comenta como Pappus reconoció en las obras de Euclides, Apolonio y Aristaeus un uso sistemático de los métodos de análisis y síntesis. Particularmente, destaca dos tipos de análisis; el primero es el análisis de los "problemas de demostración", cuyo objeto es establecer teoremas como verdaderos; el otro es el análisis de los "problemas por resolver", cuyo objeto es determinar la incógnita. Básicamente, en la metodología de resolución subyace la influencia del método analítico de Platón. La aportación de Pappus fue aplicar este último a la resolución de problemas concretos, tanto matemáticos como relacionados con la práctica.

§ 1.2 La obra cartesiana

Durante el Medioevo, el hito fundamental fue marcado por el filósofo, matemático y físico R. Descartes. Este genio francés fue el fundador del *racionalismo*, que se formó como resultado de interpretar de manera unilateral el carácter lógico del conocimiento matemático. Dado que la naturaleza universal y necesaria de este conocimiento le parecía a Descartes derivada de la naturaleza del intelecto mismo, en el proceso de conocer asignó un papel extraordinario a la deducción, basada en axiomas plenamente fidedignos, alcanzables por vía intuitiva. Para obtener el conocimiento, él creía necesario ponerlo todo en duda, salvo la cognoscibilidad. Este principio se manifiesta en su máxima *cogito, ergo sum* (pienso, luego existo).

En el ámbito de la RP, la trascendencia más especial se centra en dos de sus principales tratados: *Discours de la Méthode* (Discurso del Método, publicado por primera vez en Leyden, en 1637) y *Regulæ ad Directionem Ingenii* (Reglas para la Dirección del Espíritu, publicado post mortem en *Obras Póstumas*, Amsterdam, 1701). En 1627 comenzó a redactar sus *Reglas…* en tres tomos, con una docena de ellas cada uno; pero después de arribar a la mitad del segundo volumen, solo alcanzó a poner el título de tres reglas más, ya que la muerte vino a sorprenderlo en febrero de 1650.

En esta obra el gran pensador explica a los "mortales corrientes" como ellos podrían pensar como él, y como, siguiendo su método, podrían resolver problemas tal y como él lo hizo. El origen de sus *Reglas…* queda descrito por él mismo al plantear: "Cuando, en mi juventud, oí hablar de invenciones ingeniosas, trataba de saber si no podría inventarlas yo mismo, sin incluso leer al autor, así advertí que me conformaba a ciertas reglas".[16] La utopía de su gran proyecto descansaba sobre un plan muy

[15] Véase una traducción del griego por P. V. Eecke: *La Collection Mathématique* (2 vols.). Paris: Albert Blanchard, 1982.
[16] Descartes, R. (1701/1971) Reglas para la dirección del espíritu. *Obras de Renato Descartes*. Editorial de Ciencias Sociales, pp. 301–362.

simple, conformado por tres fases: (I) reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple; (II) reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico; y fase (III) reducir cualquier problema a un problema matemático. En cada tomo se discutiría, respectivamente, cada fase de manera detallada.

Como puede apreciarse, Descartes intentaba matematizar cualquier problema, reduciéndolo paulatinamente a una ecuación algebraica. Como ejemplos concretos de la segunda fase, figuran el estudio de problemas geométricos en el dominio del álgebra (la Geometría Analítica creada por él), la reducción de una ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Laplace, etcétera.

A continuación se enuncian algunas reglas de manera sucinta.

Regla I: Dirigir el espíritu de manera que forme juicios sólidos y verdaderos de todos los objetos que se presentan: tal debe ser el fin del estudio.

Regla III: En el objeto que el estudio se propone hay que buscar lo que se pudiera ver claramente, con evidencia, o con certeza.

Regla IV: Es necesario ser sistemático; el método[17] es necesario para descubrir la verdad de la naturaleza.

Reglas V y VI: Descomponer los sistemas complejos en componentes simples, dominar las partes simples, y reensamblar las partes comprensibles en un todo comprensible.

Regla VII: Para complementar la ciencia, es preciso, por un movimiento continuo del pensamiento, recorrer todos los objetos que se relacionan con el fin propuesto, abrazándolos en una enumeración suficiente y metódica.

Regla VIII: Si en la serie de casos a examinar, aparece alguno que no se entiende bien, hay que abstenerse de examinar los siguientes porque el trabajo que se empleará será superfluo.

El primer libro culmina con las reglas IX–XII, que ayudan a consolidar el conocimiento. Enfatiza la necesidad de profundizar en las cuestiones más simples, en la importancia de la ejercitación, en la búsqueda de relaciones entre proposiciones simples, y en el empleo óptimo de cuatro facultades: la inteligencia, la imaginación, los sentidos y la memoria. Respecto a las facultades empleadas en el conocimiento, Descartes destaca que sólo la inteligencia puede percibir la verdad, pero no debe dejar de ayudarse del resto de las facultades señaladas.

En el segundo libro se examinan cuestiones más complicadas. He aquí las reglas más significativas (también de forma sucinta):

Regla XIII: Cuando se comprende perfectamente una cuestión, es necesario abstraerla de toda concepción superflua, reducirla a sus más simples elementos y subdividirlas en tantas partes como sea posible, por medio de la enumeración.

[17] Es preciso aclarar que para Descartes el *método* consiste en "aquellas reglas ciertas y fáciles cuya rigurosa observación impide que se suponga como verdadero lo falso, y que […] el espíritu llegue al verdadero conocimiento de todas las cosas accesibles a la inteligencia humana. *No suponer verdadero lo que es falso y llegar al conocimiento de todas las cosas*". Ibíd., p. 315.

Regla XIV: La misma regla debe ser aplicada a la extensión real de los cuerpos; y es necesario representarla completa a la imaginación por medio de figuras claras; de este modo sería mucho mejor comprendido por la inteligencia.

Regla XV: Es de gran utilidad trazar figuras y representarlas a los sentidos externos, a fin de conservar la atención del espíritu.

Como podemos apreciar, estas reglas son muy adecuadas para emprender la solución de un problema. En el primer caso se incita a descomponer el problema en otros más sencillos, en el resto se sugiere la construcción de una figura de análisis. Las reglas restantes se refieren al trabajo con el tecnicismo algebraico.[18]

Por otra parte, su primera obra publicada, *El Discurso del Método*, no es más que una vuelta a las ideas básicas plasmadas en sus *Reglas*…. Comienza narrando dónde, cuándo y cómo arribó a sus ideas, para luego exponer de manera concentrada (en cuatro preceptos) su método. Además, destaca la existencia exclusiva de las "actas del entendimiento" por medio de las cuales es posible llegar al conocimiento de todas las cosas: la intuición y la deducción. Lo expuesto hasta aquí constituye, por lo menos, la génesis de lo que Schoenfeld llama "heurística moderna". Ya en estos tiempos Descartes se había preocupado, incluso, por el concepto de "problema", pero esto se verá más adelante.[19]

§ 1.3 Los aportes de otros grandes matemáticos

La Matemática es una ciencia cuyas aportaciones nunca pierden valor, en la medida que pasan los años. Todos sus hallazgos constituyen una fuente inagotable de conocimientos, y sirven de soporte para los trabajos de innumerables científicos, generación tras generación. Los conceptos se enriquecen, los teoremas se generalizan, surgen nuevas ramas y objetos de investigación. En todos los casos, los nuevos matemáticos parten del legado de sus predecesores. Como muestra de ello, en 1676, I. Newton (1642–1727) envió una carta a R. Hooke (1635–1703), donde escribió el célebre aforismo: "si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes".[20] Muchos de estos gigantes fueron capaces de

[18] Véase Ibíd., pp. 355–362.
[19] Un estudio exhaustivo de la filosofía del pensamiento cartesiano puede verse en Liátker, Ya. (1975/1990) *Descartes*. La Habana: Ciencias Sociales.
[20] Esta frase es una de las más famosas citas de Newton; sin embargo, es muy probable que él no sea el autor. De hecho, antes la frase ya estaba en circulación y solía ser atribuida a San Buenaventura, un filósofo escolástico del siglo XIII. Pero Buenaventura tampoco era original, porque un siglo antes ya habían usado la frase Bernardo de Chartres y Pedro de Blois. Al parecer el primero en hacerlo había sido Lucano, el poeta latino que en el siglo I había escrito en su "Bellum Civile" que "los pigmeos que pueden erguirse sobre la espalda de los gigantes, alcanzan a ver más lejos que ellos". En tiempos de Newton, Lucano había sido traducido al inglés por Marlowe. Sin embargo, algunos piensan que Newton sacó la referencia del libro "La Anatomía de la Melancolía", de Robert Burton, considerado el primer libro sobre psicología moderna. Este libro está lleno de párrafos brillantes y, entre sus citas, figura la siguiente: "Un enano parado sobre los hombros de un gigante verá más allá que el gigante mismo".

escribir obras de incalculable valor para las nuevas generaciones; inclusive de carácter pedagógico.

Probablemente, el matemático más antiguo que escribió para la posteridad sus ideas sobre cómo resolver problemas, fue el genio siracusano Arquímedes ($\approx$ 287–212 aEC[21]). Él consignó por escrito sus tratados más importantes durante los últimos años de su vida, antes de ser asesinado por un soldado romano, durante la toma de Siracusa por las tropas del general Marcelo. En su obra *El Método de los Teoremas Mecánicos*, reveló cómo había obtenido varios de sus resultados, incluyendo la determinación del área de un segmento parabólico, el área y volumen de una esfera, y el volumen de un elipsoide.

Esta obra extraordinaria se creía perdida, pero el 27 de octubre de 1998 el diario *New York Times* reportó la subasta de un palimpsesto del siglo XIII, el cual contenía varios trabajos de Arquímedes, incluyendo su "Método". Un palimpsesto (del griego *palin*, "otra vez", y *psao*, "raspar") es un manuscrito antiguo que ha sido raspado para escribir nuevamente sobre él, lo cual fue una práctica común antes de la invención del papel. En este caso se trataba de un viejo compendio de obras de Arquímedes, escrito en el Bizancio del siglo X. Tres siglos después, algún monje raspó esta "obra pagana" para escribir textos litúrgicos, pero afortunadamente quedaron huellas de la antigua escritura en griego. Así pasó desapercibido durante unos 600 años, hasta que en 1906 el filólogo danés J. L. Heiberg, de la Universidad de Copenhague, lo encontró por referencias en la biblioteca de la Iglesia del Santo Sepulcro en Constantinopla (actual Estambul). Fotografió varias de sus páginas y luego, haciendo uso de una lupa, publicó su hallazgo en 1913. Más tarde, después de la guerra turco–griega de 1922, el libro fue a parar a manos de una familia francesa, hasta que reapareció en la mencionada subasta. Allí fue adquirido por un coleccionista privado en alrededor de 1.2 millones de dólares.[22]

La lectura del "Método" en este palimpsesto revela dos características esenciales del pensamiento arquimedeano:

a) La combinación de consideraciones provenientes de la Matemática Pura y de la Física. Colocando segmentos y secciones de objetos geométricos sobre una

[21] Dando crédito a Tzetzes, un polígrafo bizantino del siglo XII que afirmó que Arquímedes "trabajó en geometría hasta edad avanzada viviendo 75 años" (Quiliades, 2, historia xxxv), puede ubicarse su nacimiento hacia el año 287 aEC.

[22] Este pequeño libro de 18x15 cm contiene 174 páginas de piel de oveja, encuadernadas con tapas de madera. El coleccionista (hasta ahora desconocido) se lo prestó al Walters Art Museum, con sede en Baltimore, para que ahí se realizaran las tareas de conservación y análisis necesarias, a fin de ofrecer al mundo el contenido del documento. Abigail Quandt, conservadora de manuscritos y libros raros de dicho museo, ha señalado que "el pergamino está perforado en las partes donde entraron hongos y se comieron el colágeno; en estas áreas el texto de Arquímedes desapareció por completo". Sin embargo, el Instituto Tecnológico de Rochester y la Universidad Johns Hopking, aplicando distintas técnicas (obtención de imágenes multiespectrales, fluorescencia hiperespectral, microscopía confocal, etcétera), lograron recuperar alrededor del 80 % del texto. En 2003, un físico de la Universidad de Stanford, U. Bergmann, propuso emplear un acelerador de partículas para producir rayos–X sincrotrónicos y así poder ver detrás de las ilustraciones. Se espera concluir la restauración hacia el 2008, con una versión en DVD de las obras de Arquímedes. Solo entonces volverá el palimpsesto a manos de su anónimo comprador.

balanza, Arquímedes se las ingenió para medir áreas y volúmenes. En otras palabras, sus descubrimientos geométricos fueron hechos bajo un razonamiento físico–experimental.

b) La capacidad de ejecutar sumas infinitas. Por ejemplo, él tomó una esfera y calculó su volumen como la suma infinita de los círculos que la componen. Al sumar infinitamente y obtener un valor finito, Arquímedes se adelantó dos milenios, anticipando lo que sería el concepto de límite y el Cálculo Infinitesimal.[23]

A continuación se reproduce un fragmento del epígrafe *Sobre la esfera y el cilindro* (*El Método…,* I, Corolario 34). Se trata de una especie de realismo matemático, respecto a las propiedades inmanentes de los objetos geométricos: "Estas propiedades ya eran inherentes por naturaleza a tales figuras, pero las ignoraban quienes se habían dedicado antes que nosotros a la Geometría, porque nadie había reparado en la simetría que hay entre estas figuras".[24] El uso sistemático de esta "simetría", junto a la combinación de razonamientos físico–matemáticos con sumas infinitas, constituye la esencia heurística de su "Método". Arquímedes quería dejar por escrito estas enseñanzas, lo cual constituye un *rara avis* para un matemático de su tiempo. He aquí el fragmento:[25]

Proposición:

"Es posible investigar por el método [mecánico] las proposiciones siguientes:

a) Cualquier esfera es, respecto al sólido contenido, cuatro veces el cono con base igual al mayor de sus círculos, y altura igual a su radio.

b) El cilindro con base igual al mayor círculo de la esfera, y altura igual al diámetro, es una y media veces la esfera."

Demostración:

(a) Sea ABCD el mayor círculo de la esfera, AC y BD diámetros perpendiculares entre sí (véase la figura 2). Considérese el círculo de diámetro BD, en el plano perpendicular a AC. Sobre este círculo, tomado como base, sea el cono descrito con vértice A. La superficie de este cono es cortada por un plano paralelo a su base, a través de C. Su sección será un círculo de diámetro EF. Sobre este último círculo, tomado como base, considérese el cilindro de altura y eje AC, donde H es un punto de dicho eje, tal que AH = CA.

Considérese CH como la barra de una balanza, donde A es el punto medio. Trazando cualquier línea recta MN en el plano del círculo ABCD y paralela a BD,

---

[23] Véase Castro, I. y Hernández, J. (2004) Primeros antecedentes sobre lo infinitamente pequeño. *Universitas Scientiarum*, 9 (1), 13–22. Pontificia Universidad Javeriana. http://www.javeriana.edu.co/ciencias/universitas/vol9n1/articulo%202.pdf. Cf Stewart, Ibíd., pp. 79–80.

[24] Prefacio de *Commentarii in libros de sphaera et cylindro* en Heiberg, J. L. & Stamatis, E. (1915/ reprint 1972) *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*. Vol 3. Leipzig: Teubner, pp. 2–224.

[25] El lector puede encontrar otros ejemplos similares en Netz, R. (2000) The origins of mathematical physics: new light on old question. *Physics Today on the Web* (http://aip.org/pt/june00/origins.htm).

resulta que MN corta al círculo en O y P, al diámetro AC en S, y a las rectas AE y AF en Q y R, respectivamente. Considérese el plano perpendicular a AC, que corta el cilindro en un círculo de diámetro MN, la esfera en un círculo de diámetro OP, y el cono en un círculo de diámetro QR. Ahora, ya que CA = MS y AS = SQ, resulta:

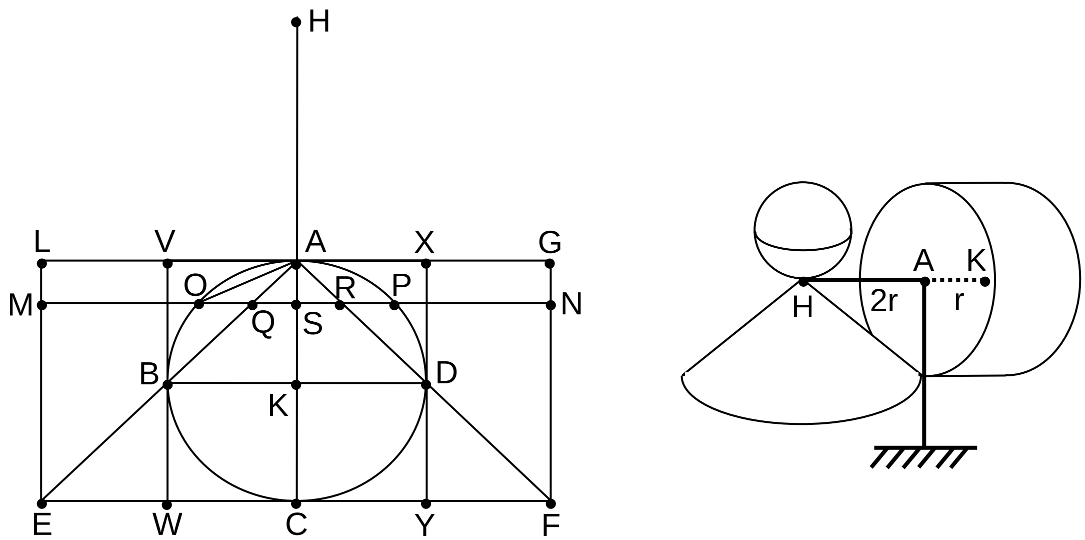

Figura 2. *Un problema resuelto por Arquímedes aplicando su "Método"*

$$
\begin{aligned}
MS \cdot SQ &= CA \cdot AS \\
&= AO^2 \\
&= OS^2 + AS^2 \\
&= OS^2 + SQ^2.
\end{aligned}
$$

Y como HA = CA, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
HA : AS &= CA : AS \\
&= MS : SQ \\
&= MS^2 : (MS \cdot SQ) \\
&= MS^2 : (OS^2 + SQ^2), \text{ de lo anterior,} \\
&= MN^2 : (OP^2 + QR^2)
\end{aligned}
$$

= (círculo de diámetro MN) **:** (círculo de diámetro OP + círculo de diámetro QR).

Esto es:

HA **:** AS = (círculo en el cilindro) **:** (círculo en la esfera + círculo en el cono).

Por tanto, el círculo en el cilindro, ubicado donde está, está en equilibrio respecto al punto A, con el círculo en la esfera junto al círculo en el cono, si los centros de gravedad de estos últimos son trasladados hacia H. De manera similar, esto ocurrirá para cualquiera de las tres secciones en que un plano perpendicular a AC corta las tres figuras.

Trabajando de igual manera con todos los conjuntos de tres círculos, en los cuales los planos perpendiculares a AC cortan el cilindro, la esfera y el cono, se sigue que el cilindro, en el lugar donde está, estará en equilibrio respecto al punto A con la esfera y el cono juntos, si los centros de gravedad de estos últimos se trasladan hacia H. Por tanto, en virtud de que K es el centro de gravedad del cilindro:

$$HK : AK = (\text{cilindro}) : (\text{esfera} + \text{cono } AEF).$$

Pero HA = 2AK. Por tanto,

$$\text{cilindro} = 2(\text{esfera} + \text{cono } AEF).$$

Sabiendo que:

$$\text{cilindro} = 3(\text{cono } AEF), \text{ Euclides XII, 10,}$$

resulta que:

$$\text{cono } AEF = 2(\text{esfera}).$$

Ahora, en vista de que EF = 2BD,

$$\text{cono } AEF = 8(\text{cono } ABD);$$

por tanto,

$$\text{esfera} = 4(\text{cono } ABD).$$

(b) Trazando ahora VBW y XDY, paralelas a AC, es posible imaginar un cilindro de eje AC, con círculos bases de diámetros VX y WY, respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{cilindro } VY &= 2(\text{cilindro } VD) \\ &= 6(\text{cono } ABD), \text{ Euclides XII, 10,} \\ &= 1\tfrac{1}{2}\,(\text{esfera}), \text{ de la relación anterior.} \end{aligned}$$

QED.[26]

Basándose en este resultado, Arquímedes dedujo que el área de la superficie de una esfera, equivale al cuádruplo de la de su mayor círculo. Además, partiendo del hecho de que un círculo tiene la misma área que un triángulo, cuya base y altura

[26] QED es la abreviatura de la locución latina *quod erat demonstrandum* (literalmente, “como queda demostrado”). Arquímedes y Euclides utilizaban esta frase sistemáticamente al culminar sus demostraciones, pero en griego: *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* (hóper édei deĩxai)**.** Arquímedes consideraba la relación entre la esfera y el cilindro su mayor logro, y le encargó a sus deudos que una representación del mismo fuese erigida sobre su tumba (Cicerón, *Tusculanæ Disputationes*, V, xxiii; y Plutarco, *Marcelo*, xvii). A modo de desagravio, el general Marcelo ordenó la construcción de un cilindro y una esfera sobre la tumba de Arquímedes. La tumba fue descubierta 137 años después por Cicerón en la isla de Sicilia. La reconoció precisamente por la esfera y el cilindro. El monumento ya se ha perdido para la historia.

equivalen en longitud al perímetro y al radio, respectivamente, dedujo que una esfera tiene el mismo volumen que un cono, cuya base y altura equivalen a la superficie y al radio, respectivamente.[27]

Como puede observarse, el “Método” pone de relieve la forma en que a Arquímedes se le ocurrían sus ideas. Como la mayoría de los matemáticos, obtenía primero una serie de resultados utilizando procedimientos totalmente faltos de rigor, y luego los pulía mediante una demostración adecuada. La costumbre de redactar las obras científicas bien acabadas, ha privado a generaciones de investigadores de conocer la génesis de las ideas de sus predecesores.

R. Netz, un estudioso de la Universidad de Stanford, defiende la naturaleza heurística de esta parte de la obra arquimedeana. Según él, una prueba de este carácter heurístico reside en el hecho de que los diagramas que figuran en el palimpsesto tampoco son lo suficientemente rigurosa. Por ejemplo, dibujar un arco de circunferencia para ilustrar una parábola.[28] Los métodos heurísticos expuestos por Arquímedes permitían intuir la respuesta de muchos problemas (como el caso de rebanar sólidos en una cantidad infinita de porciones de espesor infinitesimal y suspenderlos de los brazos de una balanza imaginaria), de manera que resultaba más fácil una resolución rigurosa ulterior.

Durante muchos siglos, después de la caída del Imperio Romano en el año 476, la enseñanza de las ciencias no fue un asunto esencial. El escaso conocimiento que se había rescatado de las culturas griega y romana, estuvieron asociados a la Iglesia Católica y, sobre todo, a las necesidades que ella tenía (como, por ejemplo, en los servicios religiosos y en la lectura de libros sagrados). Debe decirse que en toda esta época no había mucha matemática disponible, aunque en el currículo educativo (para las pocas escuelas que había) se le dio cierto énfasis a la Matemática. El modelo educativo estaba formado por lo que se llama el *cuadrivium* y el *trivium*. El primero estaba constituido por Aritmética, Música, Geometría y Astronomía; mientras que el segundo estaba integrado por Retórica, Gramática y Dialéctica. El *cuadrivium* es una prueba de la influencia griega, pues se corresponde con la concepción de la Matemática por parte de Pitágoras y la escuela pitagórica, los cuales distinguían cuatro ramas: dos discretas, que son la Aritmética (absoluta) y la Música (relativa); y dos continuas, que la Geometría (estática) y la Astronomía (dinámica).[29]

La razón fundamental del bajo nivel científico era la ausencia de factores que estimularan el desarrollo del conocimiento. Para la Iglesia de esos tiempos, la fuente de la verdad sólo se encontraban en la revelación divina, y los estudios tenían que orientarse hacia la lectura y análisis de los textos sagrados, donde se suponía se encontraban la verdad y el conocimiento. En ese sentido, los métodos empíricos o experimentales estaban prácticamente excluidos para la investigación del mundo

---

[27] Véase Heath, T. L. (1953) *The Works of Archimedes with the* Method *of Archimedes*. New York: Dover Publications.

[28] Netz, 2000, *op. cit.*

[29] Tres de estas ramas siguen constituyendo las fuentes del progreso matemático actual, a las cuales se añade la noción de probabilidad. De esta manera, en la actualidad existen al menos cinco fuentes distintas de conceptos matemáticos: el número, la forma, el modo de ordenar, el movimiento y el azar. Véase Stewart, *op. cit.*, pp. 14–15.

circundante. Como los temas principales de reflexión y análisis eran el pecado, el temor al infierno, la salvación o cómo ascender al cielo, el estudio del mundo físico real no solo se consideraba fuera de los fines de la educación y el conocimiento por parte de la Iglesia, sino que, muchas veces, era considerado algo estéril y, en ocasiones, hasta herético.

Alrededor del siglo XII, el mundo medieval comenzó a estremecerse por el descubrimiento de las grandes contribuciones de la Antigua Grecia en ciencias, artes y literatura. Fue a través del comercio y los viajes que hicieron contacto con obras que habían sido conservadas, traducidas e incluso ampliadas por los árabes. Los intelectuales y religiosos de la época retomaron estos trabajos, estableciendo una unidad entre el pensamiento aristotélico y las doctrinas del catolicismo; así crearon lo que se conoce por “Escolástica”. A pesar de ello, no pusieron sus énfasis en los aspectos naturalistas o más relacionados con la indagación empírica, sino en los aspectos más metafísicos: en la lógica y en las premisas cosmológicas que menos entraban en contradicción con los dogmas establecidos.[30] Por eso, a pesar de que se lograron algunos resultados matemáticos de interés, éstos no fueron de gran trascendencia. La situación sólo cambiaría bajo la acción de importantes transformaciones sociales, culturales y políticas que se suelen asociar con los términos del “Renacimiento”.

El fin de la Edad Media, abriendo paso al Renacimiento, suele ubicarse en el año 1453, después de la caída de Constantinopla en manos turcas. El Renacimiento fue un período en el que el estudio de la Matemática y los clásicos alcanzó un gran esplendor. A partir del siglo XV, en las universidades de Europa se comenzó a enseñar el conocimiento práctico, además del teórico que venía enseñándose desde dos siglos atrás. En particular, empezó a enseñarse lo que entonces se llamó "matemática comercial". Los jóvenes que deseaban convertirse en mercaderes o comerciantes tenían la oportunidad de formarse en la práctica, como ayudantes y aprendices de mercaderes reconocidos en su ciudad, esto es sin tener que asistir a la universidad.

El desarrollo mercantil en Europa a partir del siglo XV fue tan importante, que los mercaderes se vieron en la necesidad de estudiar técnicas matemáticas que les permitieran perfeccionar su trabajo. Además, ellos mismos empezaron a enseñar a sus hijos y ayudantes estas técnicas. Muy pronto la Matemática se convirtió en una parte inseparable del comercio. Esta situación fue desarrollándose de tal modo, que para el siglo XVI los jóvenes que aspiraban a ser comerciantes aprendían, con mucha precisión y velocidad, las operaciones aritméticas que se necesitaban para el comercio de aquella época. Para favorecer esta sed de cálculo, alrededor de 1545 G. Cardano escribión su *Artis Magnae*, una obra muy elogiada que resume el álgebra del Renacimiento.[31]

Durante el Renacimiento Italia era uno de los mejores lugares para aprender matemática comercial, pues los matemáticos italianos fueron los primeros en publicar diversos libros y tratados de Aritmética, fundamentales para el desarrollo del

[30] De aquí la génesis del palimpsesto de Arquímedes, tal y como se comentó anteriormente.
[31] Parte de los resultados fueron birlados a otros autores como Niccolò Fontana (Tartaglia). En todos los casos con los debidos agradecimientos, pero sin su permiso.

comercio y herramientas indispensables para los mercaderes y comerciantes de la época. Estos libros, llamados "Aritméticas", contenían toda la teoría matemática que los mercaderes necesitaban: en ellos se podía aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir; también se explicaban problemas aplicando la regla de tres y ecuaciones de primer grado. Pero además de teoría, todas las "Aritméticas" contenían también datos muy concretos sobre precios y distribución de productos como, el azafrán, la pimienta, la canela, el trigo, la plata, la lana, la cera y el algodón. Las condiciones estaban creadas para un esplendoroso siglo XVII.

Durante el fragor del desarrollo científico del siglo XVII, vivió el eminente matemático y filósofo G. W. Leibniz (1646–1716). Este connotado científico, creador junto con Newton del "Cálculo Infinitesimal", constituyó uno de los fundadores de la dialéctica idealista alemana. Leibniz era partidario del racionalismo idealista y orientaba la teoría del conocimiento contra el sensualismo y el empirismo, al negar que la experiencia sensorial constituya la fuente de la universalidad y necesidad del saber; él afirmaba que sólo el entendimiento puede ser dicha fuente.

Desde sus primeros trabajos, Leibniz manifiestó interés por la Matemática y sus aplicaciones. Su primera obra *Dissertatio de Arte Combinatoria*,[32] editada en 1666, aparece como consecuencia de sus estudios en la universidad de Leipzig. En ese escrito se encuentra buena parte de sus ideas fundamentales sobre combinatoria, y algunas de sus reglas básicas o método de investigación científica, que él llamó el "Arte de Inventar". Allí propuso el desarrollo de un método sugerido por R. Lull y algunos matemáticos y filósofos modernos.

Este método consistía, antes que todo, en el análisis de términos complejos en función de términos simples, resolviendo un término dado en sus partes formales para poder definirlo. Después deberían resolverse esas partes en sus propias partes, a través de la asignación de definiciones a los términos de la primera definición, hasta llegar a las partes simples o términos indefinibles. Estos términos simples corresponderían a las operaciones básicas que han de realizarse y que estarían contenidos en los subproblemas originados tras las sucesivas divisiones. El segundo paso consistiría en representar esos términos indefinibles, utilizando símbolos matemáticos. Solo entonces se encontraría el modo adecuado de "combinar" dichos símbolos. Leibniz pensaba que éste sería el proceso para formar una lógica deductiva del descubrimiento, que serviría no solamente para demostrar verdades ya conocidas, sino también para descubrir verdades nuevas. Nada más cercano del pensamiento cartesiano.

Por otra parte, también se conoce que Leibniz trató de construir un cálculo lógico aritmetizado, en forma de una máquina calculadora. De esta manera esperaba poder determinar, mediante el cálculo y conforme a las reglas formuladas, qué es verdad y qué es falsedad (sin recurrir, por supuesto, a la práctica); pero no pasó de ser una quimera esa noción de Leibniz, sobre la suplantación completa del pensamiento humano por una máquina calculadora.[33]

[32] Leibniz, G. W. (1966/1992) *Disertación acerca del arte combinatorio*. Traducción de M. Correia, Santiago de Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
[33] Véase Guétmanova, A. (1989) *Lógica*. Moscú: Progreso. Cf. p. 115 y pp. 281–284.

A la altura del siglo XVIII, un papel trascendental correspondió al matemático suizo–ruso L. Euler (1707–1783). Este eminente científico no llegó a plantear explícitamente, como Descartes, un conjunto de reglas para abordar los problemas; ni siquiera, como Leibniz, se propuso hacerlo. El mérito fundamental radica en la educación heurística manifestada en su praxis pedagógica. Según testimonios del marqués de Condorcet (M. J. A. N. de Caritat, 1743–1794): “[Euler] prefería instruir a sus alumnos con la pequeña satisfacción de sorprenderlos; él nunca creyó haber hecho suficiente por la ciencia si no hubiese añadido a los descubrimientos la íntegra exposición de la simplicidad de la idea que le llevó a ellos”.[34]

En la obra euleriana, los descubrimientos por analogías ocupan un lugar sumamente destacado. He aquí un ejemplo clásico: J. Bernoulli (1654–1705) descubrió la suma de varias series infinitas, pero fracasó con la suma de los recíprocos de los cuadrados: 1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + … El problema interesó a Euler, quien después de varios intentos, encontró el valor exacto. La analogía le había conducido al establecimiento de una conjetura. Así, tras considerar la ecuación sen$x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots = 0$, él dice que, como el miembro izquierdo es de “grado infinito”, no es extraña la presencia de una infinidad de raíces: 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, … (ya que el seno se anula, exclusivamente, cuando toma por argumento los múltiplos enteros de π). A continuación, descarta la raíz nula y divide ambos miembros por x (factor lineal correspondiente a dicha raíz), obteniendo $1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + \ldots = 0$, con raíces $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, … Luego concluye, por analogía respecto a la factorización de polinomios, que $1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + \ldots = (1 - x^2/\pi^2)(1 - x^2/4\pi^2)(1 - x^2/9\pi^2)\ldots$

Eliminando paréntesis y comparando coeficientes obtiene $1/2\cdot 3 = 1/\pi^2 + 1/4\pi^2 + 1/9\pi^2 + \ldots$ de donde resulta la solución correspondiente al problema de Bernoulli:

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + \ldots$$

Este y otros ejemplos aportados por Euler, no dejan duda alguna respecto a la potencialidad de los razonamientos por analogía. Sin embargo, en la lógica formal, el método anterior constituye una falacia indebida, pues se aplicó una regla a un caso para el cual no estaba demostrada (una regla para las ecuaciones algebraicas a una ecuación no algebraica).

Desde el punto de vista lógico, el paso de Euler no estaba justificado; no obstante, la analogía lo justificaba. Las razones para confiar en su descubrimiento no son demostrativas, pues él no analiza retrospectivamente los fundamentos de su conjetura, examinando tan solo las consecuencias. Ulteriormente, esta metodología recibió el nombre de “inducción euleriana”, y contribuyó a la solución de múltiples problemas.

Otro matemático notable que, sin aportar ningún procedimiento o regla heurística en particular, sí se propuso recopilar y divulgar los modos de actuación de los “hombres de talento”, fue B. Bolzano (1781–1848). En el libro *Wissenschaftslebre*, este científico checo expresa sus intenciones de asentar las reglas y los caminos

[34] *History of the Royal Academy of Sciences 1783*, Paris 1786, pp 37–68. Una versión en inglés aparece disponible en http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/condorcet.html.

seguidos por los matemáticos tras cada descubrimiento. Con suma modestia, Bolzano esperaba que su empresa tuviera aplicación más tarde. Por su parte, N. I. Lobachevski (1792–1856), reflejó su marcada tendencia progresista en el libro *Instrucciones para los Maestros de Matemática de los Gimnasios*. En efecto, en esta obra que data de 1830, el insigne matemático destaca la necesidad de "ayudas visuales" en la educación, así como la importancia de tomar en consideración las peculiaridades de la edad de los estudiantes.

No todos los grandes matemáticos escribieron sus memorias sobre la forma en que arribaban a sus ideas; un ejemplo de ello fue K. F. Gauss (1777–1855). Según él, cuando se ha terminado de construir un edificio, no debe dejarse a la vista el andamiaje. Por este motivo, C. G. J. Jacobi (1804–1851) comparaba a Gauss con un zorro, ("el zorro de las matemáticas"), porque iba borrando con su cola las huellas que dejaba en la arena. Un caso similar ya había ocurrido con Newton años atrás. En su *Philosophiae naturalis principia mathematica*, no queda ningún vestigio sobre cómo llegó a sus resultados. Estos aparecen expuestos al estilo geométrico clásico. Newton se aseguró de que su arma (el Cálculo) permaneciera oculta; probablemente para que sus métodos resultaran más familiares a sus contemporáneos, para evitar controversias, o quizás por su profunda admiración por la geometría clásica griega.

En una época más cercana, a principios del siglo XX, un grupo de matemáticos influyó notablemente en la DM, y muy especialmente en los métodos para enseñar a resolver problemas. Se trata del grupo Bourbaki, conformado por A. Weil, J. Delsarte, S. Mandelbrojt, P. Dubreil, J. Dieudonné, R. de Possel, H. Cartan, C. Chevalley y J. Leray. Ellos enarbolaron el lema "Abajo Euclides", en el sentido de formalizar la Matemática. La obra enciclopédica que llevaron a cabo caló profundamente en los currículos de mediados del siglo pasado, tal y como se verá más adelante.

La conformación de este controvertido grupo ocurrió en una época difícil. Así comenta en una entrevista H. Cartan (n. 1904), el último de sus sobrevivientes: "Después de la I Guerra Mundial no había muchos científicos (quiero decir buenos científicos) en Francia porque la mayoría había muerto. Éramos la primera generación después de la guerra. Después de nosotros había un gran vacío y era necesario renovarlo todo. Algunos de mis amigos se fueron al extranjero, fundamentalmente a Alemania, a fin de ver qué se hacía allí. Allí fue el debut de una Matemática renovada. Esta renovación se debió a gente como Weil, Chevalley, […]. Las mismas personas, respondiendo a la iniciativa de Weil, se reunieron para formar el grupo Bourbaki. En este grupo he aprendido mucho. Casi todo lo que sé de Matemática lo he aprendido con y en el seno del grupo Bourbaki".[35]

---

[35] Allyn, J. (2000) Un entretien avec Henri Cartan. *Gazette des Mathématiciens*, 84, p. 8. Nicolás Bourbaki fue el nombre elegido como pseudónimo por un grupo de matemáticos franceses en los años treinta del siglo pasado. Se trata de un misterio acompañado de leyendas. Una de las versiones más aceptadas es que adoptaron el apellido de un general francés de la guerra franco–prusiana: Charles Denis Sauter Bourbaki, al que en 1862 le ofrecieron ser rey de Grecia. Se decía que en Nancy (con cuya universidad estaban relacionados varios de estos matemáticos) había una estatua suya.

§ 1.4 Primeras influencias de la psicología

En la alborada del siglo XX surgieron los aportes de H. Poincaré, matemático francés que se ocupó sobremanera de la metodología general de la ciencia. Poincaré consideraba que las leyes de la ciencia no pertenecen al mundo real, sino que constituyen acuerdos convencionales para hacer más cómoda y útil la descripción de los fenómenos correspondientes. En su *The Foundations of Science* (1913), Poincaré dedica un apartado al análisis de la creación matemática. Esta sección recibió el título de *Mathematical Creation*[36], y había sido publicada originalmente en *L'Enseignement Mathématique* (1908). A pesar de las limitaciones filosóficas de este autor, lo más plausible en esta obra es la distinción que hace respecto al acto creativo. En efecto, sobre la base de su experiencia personal[37], destaca cuatro fases:

a) Saturación (actividad consciente que implica trabajar en el problema hasta donde sea posible),
b) Incubación (el subconsciente es el que trabaja),
c) Inspiración (la idea surge repentinamente),
d) Verificación (chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad).

El germen de estas ideas subyace en las vivencias que experimentó con sus propios descubrimientos. Particularmente, Poincaré narra como encontró la solución de un problema en el que había estado muy enfrascado durante 15 días. Habiendo salido de Caen, durante una excursión geológica, él comenta: "Los cambios del viaje me hicieron olvidar mi trabajo matemático. Habiendo llegado a Coutances, abordamos un ómnibus para ir a algún lugar. En el momento que puse el pie en el estribo me vino la idea, sin que nada en mis pensamientos anteriores hubiese allanado el camino […]"[38]. Más adelante resalta: "Pudiera decirse que el trabajo consciente ha sido más fructífero porque ha sido interrumpido y el descanso le ha devuelto a la mente su fuerza y frescura. Pero es más probable que el descanso haya estado lleno de trabajo inconsciente y que el resultado de este trabajo se haya revelado posteriormente […]".[39]

A decir verdad, la historia recuerda muchas otras anécdotas que, en parte, coinciden con lo anterior. Por ejemplo, el descubrimiento de la estructura anillada del benceno, cuando F. A. Kekule soñó con una serpiente mordiéndose la cola (fase 2); y el problema referido a la corona del rey Herón que condujo al *eureka* arquimedeano (fase 3). Sin embargo, las ideas de Poincaré no devienen paradigmas para describir el quehacer matemático, y mucho menos la actividad matemática en el contexto escolar. En *Materialismo y Empiriocritisismo*, V. I. Lenin expresa: "La esencia de la «original» teoría de Poincaré se reduce a la negación […] de la realidad objetiva y de

---

[36] Capítulo III, segunda parte, libro I (*La Ciencia y el Científico*). En: Poincaré, H. (1913/1982) *The foundations of Science*, University Press of America, Inc., pp. 383–394.
[37] Ibíd., pp. 387–388.
[38] Ídem.
[39] Ibíd., p. 389.

las leyes objetivas de la naturaleza".[40] Efectivamente, no se trata de que la actividad mental (particularmente el pensamiento creativo) carezca de procesos inconscientes, sino de evitar reducirla a ellos.

Otra importante contribución fue realizada por J. Hadamard (1865–1963) en su libro *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, publicado en 1945. Hadamard prosigue y profundiza el punto de vista de Poincaré, resaltando la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. De manera similar, este matemático propone un esquema algo más exhaustivo para explicar el proceso de creación matemática. Sus fases eran las siguientes:

a) Documentación (informarse, leer previamente, escuchar, discutir);

b) Preparación (realizar un proceso de ensayo–error sobre diferentes vías e hipótesis, considerando un cambio eventual de actividad en caso de no obtener ningún progreso);

c) Incubación (al cambiar de actividad, tal como hacía Einstein al tocar un violín, la solución se está gestando en el subconsciente);

d) Iluminación (ocurre la idea repentina);

e) Verificación (la idea debe someterse al análisis y comprobación, al juicio crítico);

f) Conclusión (ordenación y formulación rigurosa de los resultados).

En su época estas ideas fueron bastante progresistas. Por primera vez se intentaba explorar los fenómenos que ocurren en el cerebro humano, durante la RP. Ya no se trataba de describir ciertas reglas para conducir el pensamiento, sino de estudiar el pensamiento mismo. No es casual que, en estos mismos años, la Psicología estaba sufriendo un desarrollo trascendental y una división en varias corrientes mecanicistas e idealistas.

Una de las corrientes más conocidas, surgida como respuesta al asociacionismo imperante, fue la Gestaltpsychologie (surgida en Alemania, en 1912) que consideraba a ciertas formaciones psíquicas (*Gestalten*, del alemán *Gestalt* = forma, totalidad) fundamentales de la psiquis. Esta teoría parte de la separación entre el individuo, su medio externo y su actividad práctica. Los partidarios de dicha corriente explican la totalidad de las formaciones psíquicas por "leyes" subjetivas inmanentes, lo cual les lleva al idealismo.

Como ha podido apreciarse, las ideas de Poincaré y Hadamard son un arquetipo de explicación gestalt a la RP matemáticos. La mayor dificultad estriba en la referencia constante al inconsciente sin conocer su naturaleza. Los gestaltistas evadieron la responsabilidad de explicar las acciones que tienen lugar en el subconsciente. Ellos tenían profundas fisuras en el orden metodológico, pues su herramienta fundamental, la introspección, tendía a no ser confiable.

Otra corriente psicológica notable fue el Behaviorismo (del inglés *behavior* = conducta), cuya base filosófica es el pragmatismo. Esta teoría es completamente mecanicista, pues reduce los fenómenos psíquicos a reacciones del organismo;

[40] Lenin, V. I. (1920/1990) *Materialismo y Empiriocriticismo* (p. 155). La Habana: Pueblo y Educación.

además, identifica conciencia y conducta, considerando que la unidad fundamental de esta última es el nexo estímulo–respuesta.

Como ejemplos ilustrativos pueden tomarse los trabajos sobre fisiología del aprendizaje de B. F. Skinner. Este investigador trató de aplicar sus resultados obtenidos con ratas al aprendizaje de estudiantes de la Universidad de Harvard. Las principales ideas del enfoque de Skinner eran: el análisis cuidadoso de una tarea y el refuerzo.

El Behaviorismo influyó notablemente sobre los currículos de matemática. Desde esta perspectiva, debía resolverse paso por paso una serie de ejercicios. Así se suponía que los estudiantes podrían desarrollar habilidades básicas, las cuales se pondrían en acción durante la RP. Según J. Wyndhamn[41], esto último significa "poder aplicarlas a situaciones donde algunas características específicas (estímulo) provoca conductas específicas (respuesta)". En fin, el conjunto de razonamientos del estudiante se reduce a la simple suma de todas sus partes. [42]

Esta teoría causó un fuerte impacto en la elaboración de los libros de texto (véase la figura 3), los cuales eran fragmentados en muchas partes disjuntas y abarrotadas de tareas para ejercitar durante la lección. Las tareas presentadas se caracterizaban por estar enlazadas unas con otras sin admitir interferencias. En muchos casos, los ejercicios con textos sobre la vida real aparecían precedidos por encabezamientos tales como: "Usa la división para resolver los siguientes problemas". Desde esta óptica el aprendizaje se conseguía tras una cadena lineal de estímulos y respuestas. El pensamiento humano pasaba inadvertido, enclaustrado en una "caja negra" hasta los tiempos de Piaget y Vigotsky.

Otros aportes de la Psicología a la RP han girado en torno a la inteligencia humana. En este caso, la mayoría de los autores clasifican las teorías de diversas formas. Un caso especial lo constituyen las teorías psicométricas (o diferenciales), las cuales tuvieron como precursores a C. Spearman y L. L. Thurstone.

Spearman aplicó por primera vez el análisis factorial, para investigar la estructura intelectual. La tabla de correlaciones que obtuvo de la aplicación de diversos tests a una población numerosa y heterogénea, mostró una correlación alta y positiva, por lo que concluyó la existencia de un factor general "G", o habilidad general. Esta última sería la encargada de las operaciones de abstracción y razonamiento, es decir, de obtener relaciones y correlatos.

El factor "G" de la inteligencia, tal y como es definido por Spearman y al que denominó "educción", consiste en que, dado un fundamento y una relación, ha de extraerse el otro fundamento (educción de correlatos), y dados ambos fundamentos, extraer la relación (educción de relaciones). Las dos formas de "educción", junto a la autoconciencia, configuran las leyes que Spearman llamó neogenéticas.

---

[41] Wyndhamn, J. (1993) *Problem–Solving Revisited. On School Mathematics as a situated practice*. Doctoral dissertation. Linköping Studies in Arts and Science, No. 98, p. 10. Linköping University, Sweden.

[42] Para un estudio más profundo, véase Talízina, N. (1988) *Psicología de la enseñanza* (p. 254 y ss.) Moscú: Progreso.

EJERCICIOS DE SUSTRACCIÓN

…

Problemas para la práctica No 6:

Efectúa las siguientes sustracciones:

1.	56	83	76	
	–34	–42	–52	…
2.	667	835	798	
	–352	–514	–237	…

3. …

Problemas para la práctica No 7:

Pedrito compró 56 caramelos y ya se ha comido 34. ¿Cuántos caramelos le quedan?

En una escuela estudian 352 niños, pero la matrícula es 667. ¿Cuántas niñas estudian en la escuela?

…

Figura 3. *Un ejemplo de conductismo propuesto por Wyndhamn (con ligeras modificaciones)*

La obtención de correlaciones altas y positivas entre los resultados de los tests, admite otra interpretación diferente a la dada por la escuela inglesa: la inexistencia de un factor general y la afirmación de factores independientes o factores de grupo que integran la inteligencia. Thurstone desarrolló un procedimiento matemático, denominado “análisis factorial múltiple”, que le permitió identificar un número limitado de aptitudes mentales primarias que para él configuran la inteligencia. Se trata de las capacidades de comprensión verbal, de fluidez verbal, capacidad numérica, espacial, de memoria, de razonamiento, y de rapidez de percepción. En investigaciones posteriores, Thurstone observó que las aptitudes mentales primarias no sólo son interdependientes, sino que además son complejas y susceptibles de organizarse jerárquicamente.

Otro representante de las teorías psicométricas de la inteligencia es J. P. Guilford, de cuya obra se abordarán algunos elementos en el §§ 3.3.3. En un segundo conjunto aparecen las *teorías del procesamiento de la información*, donde se destacan los trabajos de H. Gardner y R. J. Sternberg, los cuales serán analizados en el § 2.2. La perspectiva del procesamiento de la información aborda el problema de la naturaleza de la inteligencia, describiéndola como un sistema de procesamiento de la información (codificación, almacenamiento, organización y recuperación) para llevar a cabo actividades como la propia RP.

§ 1.5 La obra de Polya

En materia de RP, es corriente que los historiadores y estudiosos escindan sus análisis en dos etapas, claramente delimitadas por el año 1945. La razón es simple: en ese año salió a la luz *How to Solve It…*, del matemático y pedagogo húngaro G. Polya (1887–1985).

La obra didáctica de Polya nace en el prefacio de *Aufgaben und Lehrsătze auf der Analysis*. En las indicaciones sobre el uso de este libro los autores dan una breve recomendación, a fin de lograr un pensamiento productivo. Ellos señalan: “Reglas generales, capaces de prescribir detalladamente la más útil disciplina del pensamiento, no son conocidas por nosotros. Sin embargo, si tales reglas pudieran ser formuladas, ellas no serían muy útiles […]; uno tiene que asumirlas en carne y hueso y tenerlas listas para un uso inminente […]. La resolución independiente de problemas difíciles ayudará al estudiante mucho más que los aforismos que él sigue, aunque para un comienzo estos puedan no dañarlo”.[43]

En *How to Solve It…* Polya no se contenta con este simple aforismo, así que realiza un estudio introspectivo del método cartesiano. Aunque su alcance se vio limitado al modesto enfoque de la heurística, hay que destacar dos aspectos fundamentales: el aislamiento de cuatro fases claramente identificables durante el proceso de RP, y la elaboración de un pequeño diccionario complementario.

En primer lugar, destaca la existencia de cuatro fases durante la resolución de un problema:

a) Comprensión del problema,

b) Concepción de un plan,

c) Ejecución del plan, y

d) Visión retrospectiva.

En cada una, Polya propone una serie de reglas heurísticas bastante sugerentes, pero lo más notorio consiste en que la mayoría de ellas van dirigidas a la segunda fase, de lo que él denominó su “lista”. Por tanto, por vez primera las pesquisas eran dirigidas hacia las fuentes de la inspiración poincareana. Entre estas preguntas figuran las siguientes:

a) ¿Se ha encontrado un problema semejante? […];

b) ¿Podría enunciar el problema en otra forma? […];

c) […] ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? […];

d) […] ¿Ha considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?[44]

[43] Polya, G. & Szegö, G. (1925/1972) *Problems and Theorems in Analysis I*, p. vii. Springer, New York.
[44] Polya, 1957, Ibíd., p. 19.

Las reglas y procedimientos heurísticos reciben un uso sistemático en todo el libro; muchas de ellas tienen raíces cartesianas, tales como “descomponer y recomponer el problema” (cf. regla XIII) y “dibujar un diagrama” (cf. reglas XIV y XV).

Es necesario precisar que la idea de separar las fases para su estudio (no “pasos” como erróneamente se ha interpretado) tiene su origen mucho antes de *How to Solve It…*. Según una separata del Órgano de los Círculos Matemáticos de Estudiantes, tomo III, números 1, 2 y 3 (1934), Polya pronunció una conferencia en Zurich en 1931 bajo el título *Cómo Buscar la Solución de Problemas Matemáticos*”. En las páginas 23 y 24 se publica un extracto de la misma, en la que se enuncian cuatro fases y algunas sugerencias (heurísticos) para progresar en cada fase. Es más, lo original y práctico de Polya son las sugerencias, pues la consideración de fases en la RP, no exclusivamente matemáticas, ya habían sido tratadas por otros autores.[45]

En segundo lugar, elaboró un *Breve Diccionario de Heurística*, que consiste en una colección de técnicas y notas históricas, ordenadas alfabéticamente y un tanto elaboradas. Aquí analiza en qué consiste la generalización, la analogía, las reglas del descubrimiento, el profesor de matemática tradicional, el razonamiento heurístico, etcétera. Polya, por ejemplo, diferencia “heurística” de “heurística moderna”. En el primer caso se refiere a una ciencia bastante mal definida y que se relaciona con la lógica, la filosofía y la psicología, en la cual se exponen métodos generales de manera poco exhaustiva. En cambio, en el segundo caso se trata de “comprender el método que conduce a la solución del problema, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico, como psicológico […]”.[46]

A pesar de que *How to Solve It…* marcó un hito en el campo de la DM, en su fecha de aparición no causó gran impacto, pues los currículos escolares estaban fuertemente influenciados por los asociacionistas, los cuales propugnaban un aprendizaje por repetición. Aun así, Polya continuó su emprendedora obra y en 1954 publicó *Mathematics and Plausible Reasoning*. Este libro estaba compuesto por dos volúmenes: *Induction and Anology in Mathematics* y *Patterns of Plausible Inference*.

En *Matemática y Razonamiento Verosímil*[47] Polya analiza diversos ejemplos históricos relacionados con la invención matemática, inquiriendo en su punto más neurálgico: el *insight*. El autor asume el punto de vista empirista de la matemática, al considerarla como una ciencia del descubrimiento; además, proporciona una serie de problemas difíciles para que el lector desarrolle habilidades por sí mismo.

---

[45] Cf., por ejemplo, Dewey, J. (1910) *How we think*. Boston: Heath; y Wallas, G. (1926) *The art of thought*. NY: Harcout Brace Jovanovich. En este libro el autor define el “pensamiento crítico” como reflexivo, dirigido a suspender los criterios preestablecidos, a mantener un alto escepticismo y el ejercicio de una mente abierta. Propone varias etapas para la RP: experimentar una situación provocadora, definir el problema, buscar datos e información, formular posibles soluciones del problema (comparando hipótesis alternativas), planificar y realizar las acciones, verificar las soluciones propuestas, y evaluar los resultados. En este último punto precisa la necesidad de modificar las creencias previas, lo cual será abordado en el capítulo 4.

[46] Ibíd., p. 102.

[47] Traducción correcta de *Mathematics and Plausible Reasoning*. A menudo algunas editoriales traducen este título incorrectamente, como *Matemática y Razonamiento Plausible*.

El impacto de esta última obra también fue limitado, sin embargo, cuando la extinta Unión Soviética lanzó su primer Sputnik (4 de octubre de 1965) el mundo capitalista, encabezado por los Estados Unidos se sintió profundamente preocupado. Ellos también querían sumarse a la conquista del espacio, hecho que presuponía una revolución inmediata en la enseñanza de las ciencias. Particularmente, en la DM, tal revolución recibió el nombre de Matemática Moderna, y su esencia consistía en "inyectar" el formalismo de la escuela Bourbaki en los currículos escolares.

Uno de los defensores de esta corriente, W. Kenneth comenta que los cursos tradicionales, anteriores a la Matemática Moderna:

a) no consideraban los avances realizados durante el siglo XX,

b) no alcanzaban los requerimientos profesionales contemporáneos en la sociedad industrial, y

c) proveían la aplicación mecánica de las reglas y técnicas sin fomentar ninguna comprensión genuina de los procesos matemáticos implicados en la RP.[48]

Por estos años la obra de Polya comenzó a difundirse por todo el mundo. Esto era un proceso claramente objetivo, motivado por la necesidad de realizar cambios metodológicos tras los ya eventuales cambios curriculares. No obstante, es en 1962 y luego en 1965 que salen a la luz, respectivamente, los dos tomos de su obra cumbre: *Mathematical Discovery*.

En este trabajo, Polya realiza un análisis profundo sobre dos temas fundamentales, explorados por él durante toda su carrera: la estructura de la matemática y la naturaleza del descubrimiento matemático. El autor incluye un compendio de problemas diversos que proporcionan algunas técnicas importantes y conducen al estudiante hacia una nueva concepción de la Matemática. Además, tal y como señala Schoenfeld, el libro "también ofrece una descripción teórica del proceso de RP, complementado con ejercicios tales, que el estudiante vive la matemática, justo más que su lectura. En síntesis, esta obra es clásica". [49]

No puede afirmarse que las memorias escritas de Polya sean perfectas. Desde luego, ninguna obra humana lo es. Desafortunadamente, algunos investigadores asumen sus postulados tácitamente, con una ausencia evidente de críticas oportunas. Un ejemplo de crítica adecuada y necesaria ha sido dado por L. Puig, profesor de la Universidad de Valencia. Comentando el capítulo *El patrón cartesiano*, del libro *Mathematical Discovery*, Puig destaca la falta de precisión en la paráfrasis de Polya sobre el método cartesiano. En efecto, interpretando las reglas cartesianas XIII–XVI, Polya señala: "En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en determinación de cierto número de cantidades desconocidas".[50] Puig reprocha con justeza que: "Aunque Polya diga que con esta frase parafrasea cuatro

---

[48] Kenneth, W. (1971) *La Revolución de la Enseñanza*, p. 91. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
[49] Schoenfeld, Ibíd., p. 38.
[50] Polya, G. (1962–1965/1981) Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving (combined edition), p. 27. New York: Wiley.

de las reglas de Descartes, en realidad la regla XIII contiene todo lo que parafrasea”.[51]

Parte de las mayores contribuciones pedagógicas de Polya estuvieron dirigidas hacia la formación del personal docente. Schoenfeld señala que “Polya fue un participante activo en los cursos de verano para profesores de Matemática en Stanford, durante la década de los 60, los mismos años en que los dos volúmenes de *Mathematical Discovery* fueron definidos, validados y publicados”[52]. Una muestra importante de este trabajo aparece en el epígrafe 14 de esa misma obra, bajo el título *On Learning, Teaching, and Learning Teaching*”.

Según B. Hodgson[53], la génesis de las ideas de Polya aparece en el ítem *Reglas de Enseñanza*, de su *Breve Diccionario de Heurística*. En efecto, aquí él apunta: “La primera regla de la enseñanza es saber qué usted supone que va a enseñar. La segunda regla de la enseñanza es saber un poco más de lo que usted va a enseñar […N]o debería olvidarse que un maestro de matemática debe conocer alguna matemática, y que un maestro que desee transmitir a sus estudiantes una adecuada actitud mental respecto a los problemas debería haberla adquirido él primeramente”.[54]

Las mismas ideas vuelven a repetirse en su *Ten Commandments for Teachers*, y se sintetizan en *Mathematical Discovery* bajo los ítems 1, 2 y 5:

a) “Estar interesado en su materia;

b) Conocer su materia; […]

c) Dar a sus estudiantes no solo información, sino destreza, actitudes del ingenio, el hábito de trabajar metódicamente”.[55]

Desde esta perspectiva, el conocimiento se subdivide en dos partes esenciales: información y destreza (en inglés *information* y *know–how*, respectivamente). La destreza matemática ha sido descrita por Polya como “la habilidad para resolver problemas, para construir demostraciones, y para examinar críticamente soluciones y demostraciones”.[56] Además, él llegó a establecer un nivel de jerarquía entre ambos componentes del conocimiento: “La destreza es más importante que la mera posesión de la información”.[57]

Polya fue capaz de notar que, aun habiendo culminado la enseñanza secundaria, los profesores de la época casi siempre aprendían su magisterio “con un

[51] Véase Puig, L. (2003) *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la Matemática Educativa* (pp. 1–3). Disponible en http://www.uv.es/puigl/granada%2003%20oral. Cf. § 1.2, reglas XIII y VII.
[52] Ibíd., p. 39.
[53] Hodgson, B. (1996) Primary and secondary school teacher education in mathematics: Role and responsibilities of the mathematician, p. 44. In: N. Din Tri et al. (Eds.) *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education* (SEACME 7), Hanoi.
[54] Polya, 1957, Ibíd., p. 173.
[55] Polya, 1981, Ibíd., p. 116.
[56] Ibíd., p. 118.
[57] Ídem.

desconocimiento o con un conocimiento inseguro de la Matemática"[58] de este nivel escolar. Obviamente, la preparación universitaria era muy pobre para enfrentar la docencia desde su dimensión más integral. Al referirse a esta preparación J. Kilpatrick comenta: "En la perspectiva de Polya, los departamentos de matemática enfatizan información abstrusa en detrimento del desarrollo de destrezas matemáticas, por cuanto, la educación escolar insiste muy tristemente sobre un contenido libre de métodos de enseñanza".[59]

Esto, por supuesto, sin negar la preparación científica relativa al contenido. Al respecto, Hodgson plantea: "El *remedio* de Polya abogaba porque se le diera a la perspectiva de los profesores una oportunidad para dedicarse a investigaciones matemáticas por ellos mismos a un nivel apropiado para sus intereses y experticia: esta fue la idea tras su seminario sobre RP para maestros, donde el conocimiento necesario era del nivel escolar y las dificultades de los problemas, justamente un poco superior al nivel escolar".[60] La utilización del término "remedio" se justifica, en el sentido de que Polya "no hace explícitas sus ideas".[61] De la misma forma, Schoenfeld utiliza el término de heurística «à la Polya»[62], pues según él las estrategias aportadas "son más descriptivas que prescriptivas".[63]

Entre los años finales de la década de los 50 a los 60 la Matemática Moderna encontró muchos seguidores. Un comentario de Kenneth da prueba de ello: "al ser tan abstracta, se pudo pensar que la Nueva Matemática sería aún más difícil […] sin embargo, parece que los niños. Aun en temprana edad, armonizan con un razonamiento matemático puro a niveles que antes se pensaba estaban más allá de su comprensión".[64] Sin embargo, desde bien temprano, muchos previeron el inevitable fracaso de esta panacea. Por ejemplo, R. P. Feynman en su artículo *New textbooks for the New Mathematics* critica la búsqueda de precisión mediante el uso del lenguaje de conjuntos. Ridiculizando el exceso de precisión escribe: "Un guardián del zoo, para mandar a su ayudante que saque los lagartos enfermos de la jaula, podría decir: «Toma el conjunto de animales, formados por la intersección del conjunto de los lagartos con el conjunto de los lagartos enfermos, y sácalos de la jaula»".[65]

Muchas fueron las causas que condujeron esta corriente al fracaso, pero no es objetivo de este epígrafe discutirlas. Aparejadamente, la didáctica evolucionaba rápidamente. Los trabajos de W. Klafki, E. Weniger y O. Willman llevan a la construcción dual de las tareas teóricas de la didáctica, enfatizando dos perspectivas

[58] Polya, G. (1959/1984) Ten commandments for teachers. In: G.–C. Rota (Ed.) *George Polya: Collected Papers*. Vol. 4, p. 531, MIT Press.
[59] Kilpatrick, J. (1987) Is teaching teachable? George Polya's views on the training of mathematics teacher. In: *Teaching and learning, a problem solving focus*, p. 87. Reston, VA: NCTM.
[60] Ídem, sin itálicas.
[61] Ibíd., p. 45.
[62] Ibíd., p. 42.
[63] Schoenfeld, A. H. (1992) Learning to think mathematically: Problem–solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: D. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 353). NY: Macmillan Publishing Company.
[64] Sic, Ibíd., p. 90.
[65] Citado por Kline, M. (1973/1981) *El Fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*, pp. 85–86. Siglo Veintiuno Editores, Madrid.

fundamentales: la didáctica como construcción pedagógica del dominio de conocimientos, con énfasis en el contenido curricular (¿qué enseñar?); y la didáctica como "coreografía" de la enseñanza y el aprendizaje, con énfasis en el binomio enseñanza–aprendizaje (¿cómo enseñar y cómo aprender?).

Podría decirse que la Matemática Moderna fue un intento apresurado por estatuir el primer punto, y que los trabajos de Polya fueron los primeros designios por desarrollar el segundo; pero lo cierto es que, entre tanto, la enseñanza de la matemática estaba sufriendo una profunda crisis. En las escuelas se continuaba implementando el aprendizaje memorístico tradicional y la práctica interminable de ejercicios básicos de fijación. Este proceso regresivo recibió el nombre de *Back to Basic* (regreso a lo básico).

§ 1.6 La era dorada

El fuerte rechazo experimentado por la *New Math* a finales de la década de los 60 y principios de los 70, conllevó al nacimiento de un nuevo movimiento reformista. Ante el desafortunado *Back to Basic*, un grupo de figuras encabezadas por P. Halmos, A. H. Schoenfeld, J. Kilpatrick y Y. Chevallard revolucionaron la DM durante la década de los 80. Objetivamente estaban dadas las condiciones para la ocurrencia de un salto cualitativo, pues las propias concepciones de la Matemática habían cambiado con el libro *Proofs and Refutations* de I. Lakatos (1922–1974). Esta obra se basa en su disertación doctoral *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, de 1961, y fue publicada entre los años 1963–1964 en cuatro partes, en la *British Journal for Philosophy of Science*. Lakatos describe la evolución histórica de un teorema de Euler, mostrando como el concepto "demostración" se sale de los marcos platónicos, para convertirse en un concepto mutante. Así, nace el punto de vista cuasiempirísta de la Matemática.[66]

Naturalmente, estas ideas no fueron aceptadas al unísono. La comunidad científica, como todo sistema complejo, es fuertemente resistente al cambio. Sin embargo, en 1985 sale a la luz una obra verdaderamente controvertida, en la cual el aula es vista como un "microcosmos" matemático: *Mathematical Problem Solving*. En este libro, Schoenfeld aborda el concepto metacognición en DM, con plena vinculación con las creencias y concepciones sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje. En estos mismos años salen a la luz varias obras del matemático francés Y. Chevallard, en la cual se describe un proceso verdaderamente complejo. Se trata de la "transposición didáctica", donde se estudia el paso que sufren los conocimientos matemáticos desde el marco discursivo donde ellos surgen, hasta llegar a constituirse como material de estudio en el ámbito docente–educativo. Este proceso comporta un reacomodo, una nueva organización del contenido, de manera que pueda ser transferido a las nuevas generaciones. La obra de este autor es fundamental para el diseño de cualquier currículo escolar, donde el más temprano

[66] Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

resultado fue obtenido hace más de 2200 años por Euclides de Alejandría, al elaborar sus *Elementos*.

Es notable la obra desarrollada en la década de los 80 por parte de los psicólogos rusos y alemanes. Cuba recibió una favorable influencia de los trabajos que la extinta República Democrática Alemana había desarrollado sobre heurística. La denominada Metodología de la Enseñanza de la Matemática se caracterizaba por su gran sistematicidad y nivel de organización en la clase, como elemento central del proceso docente–educativo. En la didáctica de la extinta URSS, brillaron los trabajos desarrollados por N. Talízina acerca de los procedimientos lógicos del pensamiento. De esta fuente de conocimientos también se nutrieron los investigadores cubanos durante varios años.

Entre 1991 y 1994 aparece un importante y revolucionador trabajo relacionado con los problemas gnoseológicos y ontológicos de la Matemática. Se trata de la obra de P. Ernest, quien desarrolló un nuevo tipo de constructivismo denominado por él mismo como “social”[67]. Los supuestos ontológicos del constructivismo social, como filosofía de la Matemática, llevan también a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos. Estos últimos, aparecen ligados a las actividades de RP que realizan ciertos grupos de personas, y que van evolucionando con el tiempo[68]. En el congreso ICME 7 (International Congress on Mathematical Education, Quebec, 1992), Ernest presentó la inmediata aplicación de sus resultados a la enseñanza de la Matemática, abriendo un campo de investigación sumamente fascinante. En este mismo congreso se destaca el profesor brasileño U. D’Ambrosio, con sus estudios referidos a la “Etnomatemática”. Este nuevo dominio de investigación científica es sumamente amplio y estudia las diferencias en el aprendizaje de la Matemática, por parte de las diferentes culturas.

En la década de los 90 también aparecieron varios trabajos, desarrollados principalmente por psicólogos, los cuales demuestran que las diferencias en el aprendizaje y motivación por la Matemática entre el hombre y la mujer no son biológicas, sino culturales. Ejemplo de ello es la obra de los investigadores M. Kimball, E. Fennema, G. C. Leder y H. J. Forgasz. También otros eminentes psicólogos abordan la naturaleza del pensamiento matemático, especialmente durante la RP con texto. En este último caso hay que destacar los trabajos de H. Yoshida; L. Verschaffel, E. de Corte, J. Wyndhamn y R. Säljö.

Desde la perspectiva psicológica, dos figuras tuvieron una notoria influencia sobre la DM: J. Piaget y L. Vigotsky. En el primer caso se destaca la elaboración de una epistemología genética, en el segundo se destaca un enfoque histórico–cultural y la conceptuación de la “zona de desarrollo próximo”. Más tarde se desarrollaron los trabajos de J. Bruner sobre “aprendizaje por descubrimiento”, así como los de D. Ausubel, relacionados con el “aprendizaje significativo”.

---

[67] Ernest, P. (1994) Varieties of constuctivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1–14. Para más información sobre filosofía de la DM véase http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/

[68] Vega, L. (1992) ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de demostración matemática. *Mathesis*, 8, 155–177.

Otra obra relevante la actualidad es la desarrollada a partir de la implementación de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) en las escuelas. En este caso, muchos han sido los intentos de utilizar con eficiencia la computadora en el aula. El conductismo llevó a cabo una primera aproximación, a principios de los años 70. En este momento la fórmula "estímulo–respuesta" constituía la supuesta realización de una antigua panacea; mas pronto se puso al descubierto su eventual fracaso.

Es justo señalar que el problema no estaba en los medios, sino en los métodos aplicados durante su utilización. Para estos tiempos algunos pedagogos pretendían incorporar el ordenador en cualquier asunto relativo a la clase, olvidando incluso el antiguo y eficiente pizarrón. Pronto se convencieron de la necesidad de hacer uso de estos medios, siempre y cuando su presencia quedara plenamente justificada; sobre todo en Geometría y en el trabajo con funciones, durante algunas animaciones. De todas formas, no es hasta finales de los años 80 y durante la década del 90, en que las TIC toman un auge extraordinario, como herramienta de trabajo en el aula.

Muchos software han salido a la luz; entre ellos el programa "Herón" (elaborado por especialistas suecos), y sumamente útil para la enseñanza–aprendizaje de los problemas con texto. En Cuba se destaca la elaboración de diversos productos multimedia, por parte de las casas productoras de software de los institutos superiores pedagógicos y por la Universidad Central de Informática. Un ejemplo distintivo consiste en el paquete "Eureka", diseñado para la enseñanza de la Matemática en el preuniversitario.

Varios paquetes computacionales han alcanzado un notable reconocimiento a escala internacional. Entre ellos figuran el "MATLAB", "SPSS", "Cabri–Géomètre", "Mathematica" y "Maple", los cuales han permitido revolucionar la enseñanza de la Matemática en todos los niveles educacionales. En todos los casos las posibilidades brindadas al usuario son enormes. Sin embargo, los estudios realizados en el campo de la DM no apuntan, en esencia, hacia la modernización del software, sino hacia la implementación más eficiente de los mismos durante la RP y el aprendizaje de diferentes conceptos.

No caben dudas de la relación que se establece entre la DM y otras ciencias, como la Matemática, la Filosofía, la Pedagogía y la Psicología. En varios trabajos de J. Kilpatrick y de A. Sierpinska se concibe la DM como un amplio campo de investigaciones científicas.[69] Sin embargo, otros autores han llegado más lejos y

[69] Existen diversos modelos que ilustran la interrelación de la DM con otras ciencias como la Antropología, la Sociología, la Semiótica, la Psicología, la Matemática (y su historia), la Pedagogía, la Epistemología, etcétera. El lector podrá encontrar ideas no necesariamente coincidentes con las expresadas anteriormente en las siguientes obras: Steiner, H. G. (1990) Need cooperation between science education and mathematics education. *ZDM*, 90 (6), 194–197; Vasco, E. (1994) La educación matemática: Una disciplina en formación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 3 (2), 59–75, Universidad de Valle, Cali; y Godino, J. D. & Batanero, C. (1997) The dialectic relationships among theory, development and practice in mathematics education: A meta–analysis of three investigations (pp. 13–22). In: N. A. Malara (Ed.) *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline*. University of Modena, Italy. Todos ellos presentan diferentes gráficos tridimensionales para ilustrar tales interrelaciones. En este último caso, los autores conciben la DM como "un campo de investigación científica y escolar, cuyas metas son identificar, caracterizar y comprender los

defienden la tesis de que se trata de una naciente disciplina científica. Este problema ha sido ampliamente tratado en los últimos congresos ICME, pero no existe un consenso en la comunidad científica.

El abordaje de los problemas subyacentes es sumamente importante para el desarrollo de la sociedad en el nuevo milenio. La comunidad científica dedicada a la DM es considerablemente grande, y está organizada en sociedades nacionales e internacionales. ¿Cómo denominar a estos científicos? Es conocido el problema filosófico que alberga la intención de definir qué es la Matemática. Sin embargo, se define comúnmente por matemático a aquél que se dedica a la Matemática. Análogamente, se denominan “educadores matemáticos” o bien “didactas de la Matemática” a aquellos que se dedican a la DM, dejando la propia definición (o caracterización) de ésta para complejas discusiones filosóficas.

Como objeto de la DM, inicialmente fue identificado el proceso docente–educativo de la Matemática, mas pronto la comunidad científica comprendió la necesidad de ampliarlo. En efecto, es necesario considerar también la influencia del medio social donde vive, interacciona y se desarrolla el sujeto; así como la naturaleza del pensamiento matemático, la propia Matemática y los procesos de transculturación que le son inherentes. De esta forma el campo sale del marco escolar, para abarcar todos los fenómenos relacionados con los procesos de estudio de la Matemática en la sociedad.[70]

En lo que respecta a la subsistencia de principios y leyes, necesarios para concederle a la DM el rango de disciplina científica, puede tomarse en consideración aquellos que hereda de la Didáctica, como ciencia más general. Así, salen a relucir la unidad entre lo cognitivo y lo afectivo, y entre lo instructivo y lo educativo, entre actividad y comunicación, entre el carácter científico e ideológico de la educación. También se destacan la unidad de las influencias educativas, el carácter colectivo e individual de la educación, así como la vinculación de la educación con la vida y del estudio con el trabajo. De todas formas, con la ampliación del campo de la DM, seguramente aparecerán nuevos principios y leyes, los cuales revelarán las regularidades del estudio de la Matemática en niveles antes no sospechados.

En cuanto a los métodos de investigación que tiene la DM, es justo señalar que, a pesar de no ser un patrimonio exclusivo, si brindan validez, confiabilidad, coherencia, objetividad, relevancia y valor social a las investigaciones, generalización, replicabilidad, originalidad, impacto educativo y social de los resultados, etcétera. Las investigaciones, regularmente, sostienen métodos teóricos (análisis–síntesis, inducción–deducción, histórico–lógico) y empíricos–experimentales (observación científica, criterios de expertos, aplicación de pruebas de constatación y validación).

Es notable la cantidad de congresos, simposios, talleres, conferencias, y otros eventos que se celebran anualmente en el campo de la DM. Incluso, en varias

---

fenómenos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática”; mientras que la Educación Matemática es “un sistema social complejo y heterogéneo, el cual incluye teoría, desarrollo y práctica, concerniente a la enseñanza y aprendizaje de la Didáctica de la Matemática como subsistema” (*op. cit*., p. 15).

[70] Véase Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca del Normalista de la SEP, España.

universidades se desarrollan licenciaturas, maestrías y doctorados en "Educación Matemática". Tomando en consideración la producción científica, así como la necesaria divulgación e intercambio de experiencias respecto a los resultados científicos de la DM, es justo considerar los siguientes hechos significativos. La figura 4 ilustra la producción científica que registra la base de datos MATH–DI desde 1976, correspondiente a la revista *ZDM* (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, según un análisis estadístico de la información *on line* hasta el año 2003, disponible en http://www.emis.de/MATH/DI/en/full.html). Es notable que actualmente se publiquen más de 350 revistas sobre diferentes campos de la DM.

Muchos núcleos científicos, dedicados a la Matemática Educativa, han ido surgiendo contemporáneamente. Encabeza este conjunto la IMU (International Mathematical Union), en cuyos estatutos se consigna "fomentar y apoyar otras actividades matemáticas en cualquiera de sus aspectos: pura, aplicada o educacional".[71] Como asociación adjunta, capaz de organizar y dirigir la esfera educacional la IMU creó en 1908 la ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Hoy día esta organización patrocina cuatro grupos de estudio y diferentes conferencias regionales.[72]

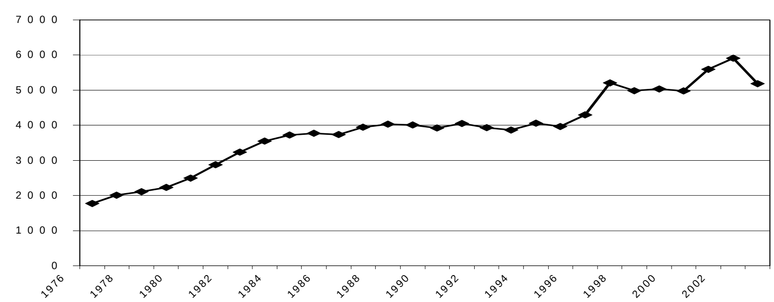

Figura 4. *Producción científica mundial sobre Matemática Educativa*

El evento cumbre celebrado por la ICMI es el antes mencionado ICME. Hasta la fecha se han celebrado diez de estos eventos cuadrienales, destacándose los cuatro últimos por el tamaño y la representatividad de las delegaciones. Baste decir que en Quebec' 1992 participaron 3407 delegados de 94 países; en Sevilla' 1996, 2762 de 98; en Makuhari' 2000, 2074 de 70; y en Copenhague' 2004, 2324 de 91. El próximo congreso será en Monterrey, México, en julio de 2008.

En el ICME 8 se conformó un grupo de trabajo (WG 25), para analizar 23 informes de investigación, en los cuales se defendía el criterio de que la DM es una disciplina científica. A su vez, éste grupo se dividió en dos subgrupos; el primero se dedicó al análisis del desarrollo de la DM en diferentes culturas, y el segundo abordó las principales cuestiones que le son concomitantes (objeto de estudio, tendencias de investigación, relación con otras ciencias, etcétera).

[71] IMU (1987) *Statutes.* I, 1 (c), p. 1.
[72] Véase ICMI (1997) *ICMI Bulletin*, Vol. 43, pp. 3–13 (disponible en http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/).

El órgano oficial del ICMI es la revista internacional *L'Enseignement Mathématique*, fundada por H. Fehr y C. Laisant en 1899. El primer presidente de la ICMI fue F. Klein, y desde entonces han integrado las juntas directivas prestigiosas personalidades de la DM mundial. Los dos últimos presidentes han sido M. de Guzmán (España, tempranamente fallecido el 14 de abril de 2004) y H. Bass (USA).

De forma similar, en el contexto latinoamericano ha sido constituido el CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa) que ha organizado diecinueve eventos denominados "Relme" (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), cuyo principal propósito consiste en fomentar el intercambio científico regional, orientando sus acciones hacia el beneficio de los sistemas escolares de América Latina.

En la República de Cuba, los primeros intentos por perfeccionar la enseñanza de la Matemática fueron realizados por la destacada pedagoga Dulce María Escalona, a mediados del siglo pasado. Sin embargo, "los vientos del modernismo que recorrieron el mundo en la década siguiente limitaron este esfuerzo, reorientándolo hacia la elaboración de nuevos programas y libros de texto para la asignatura".[73] Pocos años después, con el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación, en la segunda mitad de la década de los 70, la enseñanza de esta asignatura experimentó un cambio sustancial, fundamentado sobre bases científicas sólidas y con una marcada orientación hacia el desarrollo de la personalidad de los alumnos.

Un fuerte movimiento se ha desarrollado en todo el país a favor de la Matemática Educativa, contando con el apoyo del MINED (Ministerio de Educación) y de la SCMC (Sociedad Cubana de Matemática y Computación), hasta el punto de incluir la Matemática entre las asignaturas priorizadas. A juicio de P. Torres y sus colaboradores, este interés manifiesto por la Matemática Educativa puede explicarse a partir del fortalecimiento profesional de los profesores de Didáctica de la Matemática de los ISP (Institutos Superiores Pedagógicos), con alrededor de 30 años de experiencia; de la toma de conciencia sobre la necesidad de lograr una mayor integración entre los ISP y el subsistema de educación para el que forma profesionales; y del creciente vínculo de los investigadores cubanos con colegas iberoamericanos, en eventos científicos internacionales auspiciados por el MINED o por diferentes universidades del país.[74]

Como se ha podido apreciar, en toda Iberoamérica se ha instituido un gigantesco sistema de investigación en Matemática Educativa. Esto podría significar que la didáctica de esta ciencia tiene resuelto el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, pero lamentablemente esto no es así. No sólo los informes de investigación están lejos de aportar una solvencia plausible a las problemáticas científicas que enfrentan, sino que los sistemas educacionales, como todo sistema complejo, ofrecen una fuerte resistencia ante cualquier vestigio de cambio. A propósito, los expertos del programa iberoamericano IBERCIMA han señalado que "[u]n análisis elemental sobre la situación general de la enseñanza de la matemática

---

[73] Torres, P. (1996) *Didácticas cubanas de la enseñanza de la Matemática* (p. v) . La Habana: Academia.

[74] Torres, P. et al. (1998) *Tendencias iberoamericanas en la educación matemática*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.

y las ciencias demuestra que esta es muy deficiente en la mayoría de los países del área […]".[75]

El presente libro se enmarca en el campo de la RP, conocida ora como "línea directriz" de la DM, ora como "estándar curricular". Como se ha podido apreciar, la evolución histórica de la DM ha estado matizada por un constante afán de enseñar a resolver problemas, y también de desentrañar la naturaleza de los procesos psicológicos asociados. También es necesario destacar el hecho de que este trabajo es una modesta contribución a la sistematización de la teoría, lo cual refuerza el criterio de que la DM evoluciona como disciplina científica. En efecto, varios conceptos abordados aquí se convierten en objeto de estudio, a pesar de que muchos de ellos son aceptados sin un juicio crítico en algunas obras. Por otra parte, dedicaremos todo un capítulo a discutir un elemento que a nuestro juicio ha pasado desapercibido por muchos autores. Se trata de un elemento sumamente importante, por constituir el soporte material donde ocurren los procesos antes mencionados. Nos referimos, por supuesto, al cerebro humano.

Bibliografía para el capítulo 1

Para un estudio complementario de la evolución histórica de la DM en general, así como de la RP en particular, se recomienda la lectura de las siguientes obras:

Artigue, M. (1998) Research in Mathematics Education trough the eyes of mathematicians. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 477–489). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balieiro, I. F. (2004) *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: Quatro episódios da história da heurística*. Tese de Doutorado. Rio Claro: IGCE, UNESP (http://www.biblioteca. unesp.br/bibliotecadigital/document/?did=2255).

Bidwell, J. K. & Clason, R. G. (1970, Eds.) *Reading in the history of Mathematics Education*. Washington, DC: NCTM.

Bieler, R. *et al.* (Eds., 1994) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Kluwer Academics Publishers, Dordlecht.

Castelnovo, E. (1966) *Didattica della matemática*. La Nouva Italia, Firenze.

Cockcroft, W. *et al.* (1982) *Mathematics count*. A report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. London: Her Majesty's Stationery Office.

Cruz, M. y Aguilar, A. (2001) Evolución de la Didáctica de la Matemática. *Función Continua*, 12 (II), 23–41.

[75] Río, J. del; Hernández, L. Y. y Rodríguez, M. J. (1992) *Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica* (p. 14). Madrid: Mare Nostrum.

D’Ambrosio, U. (1985) Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 44–48.

Gascón, J. (1998) Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7–34.

Gascón, J. (1999) La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, 11 (1), 77–78.

Fouche, A. (1952) *La pedagogie des matematiques*. PUF, París.

Guzmán, M. de (2001) La actividad subconsciente en la resolución de problemas. *Red Científica* (http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html).

Heath, T. L. (1953) *The Works of Archimedes with the* Method *of Archimedes*. New York: Dover Publications.

Higginson, W. (1980) On the foundations of Mathematics Education. *For the learning mathematics*, 1 (2), 3–7.

Kahane, J–P. (1988) La grande figure de George Polya. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.): *Proceedings of Sixth International Congress on Mathematical Education* (pp. 79–97). János Bolyai Mathematical Society.

Kahane, J–P. (2000) La commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques. *Gazette des mathematiciens*, 84, 63–69.

Kilpatrick, J. (1985) A retrospective account of the past twenty–five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.): *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1–15). NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1992) Historia de la investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.): *Educación Matemática e investigación*, Madrid: Síntesis.

Kline, M. (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times*. NY: Oxford University Press.

Kubínová, M. (2001) *The position of didactics of mathematics in the training of mathematics teachers* (http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome12/article6.htm).

Liátker, Ya. (1975/1990) *Descartes*. La Habana: Ciencias Sociales.

Malara, N. (1997, Ed.) *An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Proceedings of WG 25, ICME 8, Modena.

Netz, R. (2000) The origins of mathematical physics: new light on old question. *Physics Today on the Web* (http://aip.org/pt/june00/origins.htm).

Río, J. del; Hernández, L. Y. y Rodríguez, M. J. (1992) *Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica*. Mare Nostrum Ediciones Didácticas, S. A., Madrid.

Sawada, T. (1990) *International comparisons on Mathematics Education*. Final report of SIMS, NIER, Tokyo.

Schoenfeld, A. H. (1987) A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus* (pp. 27–46). Reston, VA: NCTM.

Sierpinska, A. *et al.* (1993) What is research in mathematics education, and what are its results? *Journal for research in Mathematics Education*, 24 (3), 274–278.

Steiner, H. (1985) Theory of Mathematical Education (TME): An introduction. *For the Learning of Mathematics*, 5 (2), 11–17.

Torres, P. (2000) *La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.

2. EL CEREBRO HUMANO COMO SOPORTE MATERIAL

Usualmente se afirma que determinado problema ha sido “resuelto” por una computadora. Tal planteamiento no puede ser permisible si esa resolución se reduce a la ejecución de un conjunto de operaciones, lo cual conduce al mecanicismo. Probablemente, el problema que se ha resuelto compete a la Cibernética, y consiste en buscar un algoritmo para resolver cierta clase de problemas. No fue entonces un mérito del ordenador, sino del cerebro del hombre.

Desde una perspectiva personológica, la RP constituye una actividad eminentemente conciente, y relativa a la cognición humana. Sin embargo, su análisis no puede estar completo si se margina el portador material del pensamiento. Por ello, antes de pasar al análisis gnoseológico, es conveniente abordar ciertos aspectos ontológicos del cerebro humano. La DM no puede desentenderse de estas cuestiones. Por ejemplo la enseñanza del concepto de número y de las demostraciones depende en gran medida de la maduración ontogenética del hombre.[76]

En el primer caso, el aprendizaje más elemental (concepto de número natural) debe ubicarse al final de la etapa “preoperacional” (6–7 años), hasta continuar con el cálculo de números racionales durante toda la etapa de las “operaciones concretas” (7–11 años). En esta última etapa los procesos de razonamiento se vuelven lógicos y pueden aplicarse a problemas concretos o reales. También aparecen los

[76] Véase Inhelder, B. y Piaget, J. (1955) *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent. Essai sur la constructions des structures opératoires formalles*. París : PUF.

esquemas lógicos de seriación, y se logra el ordenamiento mental de conjuntos. Por este motivo los estadios finales constituyen el espacio oportuno para el estudio de sencillas ecuaciones e inecuaciones lineales, problemas con texto y movimientos del plano.

Por su parte, la enseñanza de la línea directriz “Teoremas y sus Demostraciones” debe comenzar en la etapa “lógico formal” (11–15 años). Aquí el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados, que permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. De todas formas, el razonamiento del adolescente todavía no llega a alcanzar un desarrollo pleno. La experiencia ha demostrado que estas etapas piagetianas son movibles, pudiendo adelantarse o retrazarse algunas de ellas, en virtud de una enseñanza más o menos desarrolladora. De todas formas no puede negarse su existencia, como muestra de diferentes estados de maduración del cerebro humano. A continuación se examinarán algunas cuestiones básicas sobre este extraordinario órgano.

§ 2.1 La extraordinaria capacidad del cerebro humano

En la antigua Grecia ya se conocía que el pensamiento ocurre en el cerebro del hombre, y para los filósofos de esta época el problema era escudriñar la naturaleza de ese pensamiento. Por ejemplo, en el diálogo platoniano *Timeo o de la Naturaleza* Timeo de Locres afirma: “[…] que ninguna parte del cuerpo humano es más débil que la cabeza, pero ninguna es tampoco más apta para las sensaciones y para el *pensamiento*”.[77] Por estos tiempos Demócrito de Abdea (≈ 460–370 aEC) pensaba que la percepción sensorial constituye la fuente básica del conocimiento, pero que proporciona un saber “confuso” de los objetos. A esta conclusión materialista se oponía Platón, quien suponía que la fuente del conocimiento está en el alma inmortal, y afirmaba que las cosas y fenómenos sensoriales son incognoscibles.

En el Medioevo Descartes también incursionó en el campo de la fisiología, estableciendo un esquema de reacciones motoras que constituye una de las primeras descripciones científicas del acto reflejo. En *Las Pasiones del Alma*, abordando la “máquina del cuerpo” desde una nueva perspectiva, él examina los mecanismos de interacción entre el cuerpo y el alma por medio de los “espíritus animales” y de un órgano cerebral denominado “glándula pineal”; y el mecanismo de los reflejos incondicionados y condicionados en el hombre y en los animales.

Más tarde, a mediados del siglo XIX, los partidarios del materialismo vulgar (L. Büchner, K. Vogt y J. Moleschott) llegaron a establecer una analogía entre el hígado y el cerebro, al afirmar que este segrega ideas de la misma manera que aquel segrega la bilis. A finales de este mismo siglo H. Helmholtz (1821–1894) logró medir la velocidad con que se transmite la excitación nerviosa, y realizó algunas investigaciones sobre la fisiología de los órganos sensoriales. Este naturalista

[77] Timeo pertenecía a la secta de los Pitagóricos. Era un gran astrónomo, escribió libros de Matemática y un tratado de la naturaleza a la manera de Pitágoras. Platón, Ibíd., t. 2, p. 827 (sin itálicas).

alemán mantenía concepciones espontáneamente materialistas, sin embargo, algunas veces se inclinó hacia el kantismo. Un ejemplo importante fue su *Teoría de los Jeroglíficos*, concepción gnoseológica tendiente a demostrar que mediante las sensaciones en la conciencia no se crean imágenes que reflejan los rasgos de los objetos y de los fenómenos, sino símbolos, señales, jeroglíficos que nada tienen en común con las cosas y sus propiedades.[78]

Por otra parte, también a finales del siglo XIX, el padre de la fisiología rusa I. M. Séchenov (1829–1905) formuló las bases de la teoría del carácter reflejo de la actividad psíquica de los animales y del hombre, e introdujo los conceptos de analizador, reflejos adquiridos, entre otros. Poco después, el doctor F. J. Gall desarrolló una "ciencia experimental de la mente", basada en asumir a priori que el fenómeno natural tiene causas naturales que pueden ser determinadas y que las características anatómicas y fisiológicas tienen una influencia directa en la conducta mental. Gall es el padre de la Frenología (del griego φρήν, inteligencia y λόγος, tratado), hipótesis que consideraba el cerebro como una agregación de órganos, correspondiendo a cada uno de ellos determinada facultad intelectual, instinto o afecto. Estos últimos gozarán de mayor o menor energía, en la medida que esté desarrollada la parte cerebral correspondiente. Los seguidores de esta corriente llegaron a aislar 37 facultades u "órganos frenológicos" en el cerebro.[79]

Entre tanto, las ideas de Séchenov servían de base para los trabajos de su coterráneo I. P. Pávlov (1849–1936). Las investigaciones acerca de la fisiología de la digestión condujeron al eminente naturalista a la idea de que es posible aplicar el método de los reflejos condicionados al estudio de la conducta, de la actividad psíquica de los animales. El fenómeno de la "salivación psíquica" y numerosas observaciones experimentales le sirvieron de base para descubrir la función señalizadora de lo psíquico.

En su obra *Conferencias sobre el funcionamiento de los hemisferios del cerebro* (1927), Pávlov distingue dos sistemas corticales que señalizan la realidad. El primero se encuentra dividido en analizadores, en cuyos extremos corticales ocurre el pensamiento concreto–ilustrativo (sensaciones y complejos de sensaciones–percepciones); mientras que el segundo es el pensamiento humano, que es abstracto (representaciones generales, conceptos, generalizaciones y deducciones) y discursivo. El primer sistema de señalización es común en otros animales, pero el segundo es exclusivo del hombre y consta de cuatro analizadores: motor de articulación del lenguaje, auditivo del lenguaje oral, motor del lenguaje escrito, y óptico del lenguaje escrito.

Todos los analizadores verbales se engendran en ambos hemisferios, pero solo se desarrollan de un lado y funcionalmente resultan ser asimétricos. Este enlace entre

[78] Véase un análisis sobre esta teoría en Lenin, Ibíd., 1990, pp. 222–228.

[79] Cuentan que Franz Joseph Gall, a los 9 años, observó que aquellos condiscípulos que poseían una buena memoria, tenían también ojos saltones. Por ello, dedujo que la parte del cerebro relacionada con tal capacidad se encontraba detrás de los ojos y, al estar muy desarrollada, había empujado los glóbulos oculares hacia delante. Para más detalles, véase Schoenfeld, Ibíd., pp. 30–32. Véase *Diccionario Enciclopédico Hispano–Americano*, tomo 8, pp. 735–736, Barcelona: Montaner y Simón Editores (http://www.filosofia.org/enc/eha/index.htm).

el analizador motor de la mano y los analizadores verbales se explica por la unión indisoluble entre ese órgano de trabajo y el habla. Prives y sus colaboradores aseveran: "La base morfológica del segundo sistema de señalización no está constituida solamente por dichos analizadores. [… L]a función del lenguaje es más joven filogenéticamente, por eso está menos localizada; es inherente a toda la corteza. […] Con todo, el segundo sistema de señalización no funciona separado del primero, sino en contacto con el mismo, y es más, en su base, puesto que las segundas señales solo pueden surgir con la presencia de los mismos".[80]

La doctrina de Pávlov sobre los dos sistemas de señalización mereció el premio Nobel, pues da la explicación materialista de la actividad psíquica del hombre. Sus ideas constituyen la base de la *Teoría del Reflejo* de Lenin. De acuerdo con esta última, el mundo objetivo se refleja en la conciencia en forma de imágenes subjetivas. Un ejemplo puede ser que en un individuo sano, la misma cantidad y calidad de energía es aprovechada por la luz verde, que en el caso de un individuo daltónico la luz roja. Por consiguiente, la energía luminosa es la realidad objetiva, y el color es la imagen subjetiva; su reflejo en la conciencia depende del órgano de los sentidos, en este caso los ojos.

Hoy día los neurocientíficos coinciden en que la naturaleza del pensamiento sigue siendo un enigma. No obstante, en el último siglo han aflorado disímiles resultados de relevante interés. Por ejemplo, en su *Inside the Brain: Revolutionary Discoveries of How the Mind Works*, el premio Pulitzer R. Kotulak llegó a la siguiente conclusión: "El cerebro no es un órgano estático; es una masa de conexiones celulares en constante cambio muy influida por la experiencia". En cualquier caso, la experiencia no es el único factor que incide en el cerebro; también influye en este órgano el pensamiento, pues los investigadores han comprobado que los individuos mentalmente activos tienen hasta un 40 % más de conexiones (sinapsis) entre las neuronas que los mentalmente perezosos.

Hay informes de que al envejecer se pierden algunas neuronas, y que en la tercera edad la memoria se debilita. De todos modos, la diferencia es mucho menor de lo que en un tiempo se pensaba. Un informe de *National Geographic* sobre el cerebro humano asevera: "La gente mayor […] conserva la capacidad de generar nuevas conexiones y mantener las antiguas mediante la actividad mental". Esto es impresionante, pues también se sabe que en toda una vida el hombre utiliza apenas una diezmilésima parte del potencial del cerebro.

El cerebro humano culmina su desarrollo alrededor de los 20 años, llegando a pesar aproximadamente 1375 g en el hombre y 1245 g en la mujer. Este órgano consta de unos cincuenta mil millones de neuronas, con mil billones de sinapsis (conexiones), y con un promedio general de diez mil billones de transmisiones por segundo. La corteza constituye la superficie de los hemisferios cerebrales; está formada por una capa uniforme de sustancia gris, de 1.3 a 4.5 mm de espesor, que contiene entre diez y cien mil millones de células nerviosas.

El área total de la corteza es de 220 000 mm² aproximadamente, y si se alisara cubriría la superficie de cuatro hojas de papel para máquina de escribir. En cambio,

[80] Prives, M.; Lisenkov, N. y Bushkovich, V. (1975) *Anatomía humana* (p. 231). Tomo II, Moscú: Mir.

la del chimpancé abarcaría solo una, y la de una rata apenas un sello de correo. Es necesario señalar que dos tercios de la corteza se localizan en la profundidad de sus pliegues, y solo otro tercio se halla en la superficie. La magnitud y la forma de sus surcos están sometidas a considerables oscilaciones individuales, por lo cual no solo el cerebro de diferentes personas, sino incluso los hemisferios de un mismo individuo no tienen completa semejanza en la disposición de los surcos. Los surcos profundos y constantes sirven para la división de cada hemisferio en grandes porciones, denominadas lóbulos, los que a su vez se subdividen en lobulillos y circunvoluciones. Hay cinco lóbulos en cada hemisferio: frontal, parietal, temporal, y la ínsula de Reil.

Los escáneres del cerebro demuestran que el lóbulo frontal se activa cuando se piensa en una palabra o se evoca algún recuerdo. Esta parte tiene mucho que ver con la identidad personal. Por su parte, la corteza prefrontal desempeña un papel importante en la elaboración del pensamiento, la inteligencia, la motivación y la personalidad. Relaciona las experiencias necesarias para la formación de las ideas abstractas, el juicio, la perseverancia, la planificación, el interés por los demás y la conciencia.

Varios autores han reportado serias dificultades, relacionadas con lesiones de esta zona del cerebro humano. Se destacan los siguientes déficit cognitivos: dificultades en el planeamiento, razonamiento, resolución de problemas, formación de conceptos y ordenamiento temporal de los estímulos; trastornos de la atención, aprendizaje asociativo, del proceso de búsqueda en memoria y del mantenimiento de la información en la memoria de trabajo; alteración de algunas formas de habilidades motoras, generación de imágenes, manipulación de las propiedades espaciales de un estímulo, metacognición y cognición social.[81] Sin dudas, la elaboración que tiene lugar en esta zona distingue al ser humano en el reino animal.

Detrás de la corteza prefrontal se localiza una franja que se extiende de un lado a otro de la cabeza: la corteza motora. Lo más relevante de esta región no reside en los millones de neuronas que aparecen conectadas con los músculos, sino en la capacidad que brinda para usar la mano con una destreza excepcional, y para emplear la boca, los labios, la lengua y los músculos faciales al hablar.

La información necesaria para ejecutar el habla se almacena en la parte del lóbulo frontal del cerebro humano, denominada área de Broca. Sin embargo, el significado de las palabras se almacena en otra parte, conocida como área de Wernicke, y ayuda a comprender lo que se lee o escucha. En el habla fluida intervienen varias regiones del cerebro. A modo de ilustración, un sencillo "hola" puede comunicar una gran cantidad de significados, pues el tono de la voz refleja el estado de ánimo y emocional.

Desde el punto de vista morfológico el cerebro del hombre es muy superior al del resto de los animales. Prives y sus colaboradores señalan varios rasgos distintivos esenciales, destacando que:

---

[81] Grafman J., Holyoak, K. and Boller, F. (1995, Eds.) *Structure and Functions of the Human Prefrontal Cortex*. Volume 769, New York: New York Academy of Sciences.

a) la razón entre el peso del encéfalo humano respecto al peso del cuerpo es la mayor (otros animales como el elefante y el delfín tienen un cerebro mucho más voluminoso, pero relativamente pequeño respecto a sus cuerpos);
b) existe una preponderancia del neoencéfalo sobre el paleoencéfalo;
c) el lóbulo frontal ocupa el 30 % de los hemisferios, alcanzando un mayor desarrollo (en los monos antropoides es apenas el 16 %);
d) existe un segundo sistema de señalización, cuyo substrato anatómico son las capas más superficiales de la corteza cerebral.[82]

La enseñanza no puede desatender los elementos básicos, relativos al cerebro humano como soporte material. La enseñanza de la RP constituye uno de los casos más significativos, en virtud de que se requiere la activación de todas las funciones psíquicas superiores. Un estudiante que haya sufrido una lesión que afecte de manera temporal o permanente su memoria, sin dudas no podrá resolver problemas matemáticos con la misma efectividad que alcanzaría en condiciones normales.

La salud es esencial en todas sus dimensiones. Por ejemplo, una persona que haya tenido deficiencias nutricionales a largo plazo, tiene consecuencias en su comportamiento y su aprendizaje, incluyendo depresión. R. Wurtman (Departamento de Ciencias Cognoscitivas y del Cerebro, Instituto Tecnológico de Massachussets), cree que los nutrientes que llegan al cerebro a través de la sangre, afectan la cantidad de sustancias químicas que hay en él y le llama a esto la *Teoría del Precursor*. Cuando estos nutrientes entran al cerebro a través de una zona llamada barrera cerebral (donde sólo pueden entrar ciertas sustancias seleccionadas), activan la producción de más de ciertas sustancias químicas del cerebro.

Estos cambios de sustancias pueden producir cambios en el comportamiento y en el ánimo de la persona. Por ejemplo una de estas sustancias químicas se llama la serotonina, la cual constituye un trasmisor de señales en el cerebro. Wurtman afirma que si se provocan cambios en el cerebro tales que disminuya la serotonina, entonces se estimula un deseo por la sustancia; lo cual hace que la persona busque ingerir por ejemplo dulces y harinas (carbohidratos), los cuales hacen que la serotonina aumente nuevamente. Se cree que las personas que se vuelven adictas a ciertas sustancias controladas como las drogas ilegales, tienen ciertos desbalances o deficiencias de neurotransmisores en el cerebro, lo cual los hace más susceptibles o vulnerables a estas drogas pues actúan como un regulador que estabiliza el desbalance.

[82] Prives, M. et al. Ibíd., pp. 232–234.

§ 2.2 Retos de la actualidad

Una polémica suscitada por el desarrollo cibernético y computacional, ha sido la comparación del cerebro humano con un ordenador. Para R. M. Restak el símil no hace justicia con la realidad, pues la computadora más avanzada de redes neuronales tiene una diezmilésima parte de la capacidad mental de una mosca común.[83] Por otra parte, *The New Encyclopædia Britannica* explica: "La transmisión de información dentro del sistema nervioso es más compleja que la mayor central telefónica del mundo; la capacidad que tiene el cerebro humano de solucionar problemas supera, con gran diferencia, a la de los ordenadores más potentes". Sin embargo, contrariamente, H. Moravec (Carnegie Mellon University Mobile Robot Laboratory) "predijo" la evolución futura de la robótica moderna en la siguiente secuencia: robot mudo (2000–2010); robot que aprende (2010–2020); robot que modela lo real y lo imaginario (2020–2030); robot que razona (2030–2040); equivalente humano (*Mind Children*, 2050 y ss.).[84]

Como se ha podido apreciar, las opiniones son discordantes en sumo grado. Desde una perspectiva dialéctica es necesario inquirir varios conceptos como "pensar", "aprender", "imaginar", "razonar", antes de pasar a discutir si una máquina puede hacerlo. Así por ejemplo, si "pensar" es resolver problemas (como algunos afirman equivocadamente) entonces la conjetura de Moravec no deberá esperar hasta el 2050 para hallar su validación. La computadora no puede igualar y menos superar a un inventor que desconoce el alcance de sus propias facultades. La previsión de Moravec supone, implícitamente, que dentro de medio siglo ya se tendrá un conocimiento apodíctico del funcionamiento del cerebro humano, lo cual parece ser muy poco probable.

Una de las maneras que los científicos han usado para comprender la función del cerebro ha sido compararla con las máquinas o los artefactos de comunicación y cálculo más actuales. Pascal sugirió que el cerebro utilizaría en sus cálculos algún proceso similar al de su elemental máquina para realizar operaciones y que era poco más que un ábaco semiautomático. En los principios de la telefonía al cerebro se le comparó con una red de intercomunicaciones similar a un conmutador. Más tarde se configuró la analogía más interesante de la época actual: la del cerebro como una computadora electrónica, y nació así la Inteligencia Artificial. Por ejemplo, se sugirió que el cerebro era análogo a la máquina en su sentido físico, lo que llaman los computólogos el hardware, en tanto que la mente correspondería a los programas, que constituyen el software.

D. Lenat (Massachusetts Institute of Technology, 1978) elaboró un programa conocido por "Eurisko", que logró aventajar a muchos otros[85], pues fue capaz de aplicar sus descubrimientos a los nuevos problemas que se le plantearon. Al

[83] R. M. Restak (1984) *The Brain*. NY: Bantam Books.
[84] Moravec, H. P. (1992) The Universal Robot. *Speculations in Science and Technology*, 15 (4), pp. 286–294.
[85] Entre ellos el *Logic Theorist*, elaborado por H. Simon, que en 1956 demostró la mayoría de los teoremas enunciados en *Principia Mathematica*, de B. Russell.

programa se le suministró información acerca de la evolución animal, y “aprendió” que los animales se especializan más en la medida que el medio ambiente se mantiene estable. Después de esto, utilizó los conocimientos adquiridos en el diseño de naves espaciales. La flota de Eurisko era lenta, torpe y muy especializada, pero en realidad resultó ser tan terrible que muchos contrarios se dieron por vencidos sin abrir fuego ni siquiera una vez.

Este programa descubría cosas por sí mismo, y por ello había que darle potestad para intervenir en sus propias heurísticas de aprendizaje y objetivos. Trabajaba toda la noche pero a menudo aparecía muerto. Eurisko ponía al mismo nivel dos reglas que valoraba en extremo: “no cometer ningún error” *y “*hacer nuevos descubrimientos productivos”. Para no equivocarse prefería no hacer nada, es decir prefería suicidarse. Lenat tuvo que añadir una nueva heurística que prohibía esa equivalencia.

Tanto Eurisko, como los restantes ingenios de la Inteligencia Artificial son superados por el cerebro humano. En cuanto a velocidad de operaciones, ya se hizo alusión a la extraordinaria velocidad promedio de diez mil billones de transmisiones por segundo, lo cual supera el record más reciente. En efecto, el 25 de marzo del 2005, IBM construyó la supercomputadora más potente del mundo (80 000 veces más potente que “Deep Blue”, la máquina que derrotó a Garry Kasparov).

Este monstruo de silicio denominado “Blue Gene/L” es capaz de mantener una velocidad sostenida de 70,72 teraflops (un teraflops equivale casi a un billón de cálculos por segundo), llegando a alcanzar hasta 135,5 teraflops. Esta nueva marca ha sido conseguida en el Lawrence Livermore National Laboratory, centro de investigación del Departamento de Energía de EUA. Los científicos esperan conseguir próximamente una velocidad de cálculo de 360 teraflops. Blue Gene/L ayudará a mantener los sistemas de seguridad de los arsenales de armas atómicas estadounidenses, mediante simulaciones sin necesidad de realizar ensayos nucleares. Aunque la tecnología continuará avanzando, el camino que resta es bastante largo.[86]

Por otra parte, el cerebro es capaz de realizar muchas operaciones simultáneamente. Un gran número de sus mecanismos han sido estudiados y se ha comprobado que cada uno se encarga de resolver ciertos problemas de procesamiento simultáneo. Esos mecanismos incluyen asociación, generalización y autoorganización. Cada uno de esos principios está dirigido a la realización simultánea de muchos procesadores neuronales separados, que trabajan para un fin común.

El cerebro no es una computadora. Millones de microcomputadoras pueden conectarse en un patrón de redes neuronales, pero las tareas de una neurona no pueden duplicarse, simplemente porque las habilidades multifuncionales de una neurona son muy diferentes de las capacidades de las computadoras digitales para hacer una solución efectiva. Las redes neuronales en el cerebro procesan

[86] Desde que el Laboratorio Nacional de Los Álamos construyera, en 1976, la supercomputadora “CRAY–1“, con una rapidez de 80 megaflops, la velocidad de cálculo ha crecido más de 500 000 veces.

información de acuerdo a principios no computacionales. Las neuronas procesan operaciones continuas, a diferencia de las operaciones discretas de un computador digital. Un aspecto de las neuronas (su naturaleza continua), puede ser simulado vía software, como se hace en las neuro–computadoras, aunque en la actualidad están surgiendo mejores modelos cerebrales representados en microcircuitos diseñados especialmente para trabajar como una neurona.

Como las computadoras digitales están siendo usadas para simular el procesamiento de la información en el cerebro, las máquinas que son un modelo cercano del cerebro, más que simularlo, sustituyen los mecanismos físicos para los cálculos lógicos y matemáticos de la computación. Algunos científicos sostienen que las redes neuronales del cerebro y las de las máquinas que lo modelan, realmente son sólo análogas, opuestas a lo digital. Antes de que las computadoras digitales dominaran la automatización, compitieron contra las computadoras análogas. Estas computadoras análogas, basadas en el mismo sistema de las restricciones de paso por paso que tiene la computación digital, no trataron de modelar su capacidad de evaluación global del cerebro, sino que fueron forzadas a seguir un programa justo como los de las computadoras digitales.

Pueden enumerarse otros argumentos que evidencian la superioridad del cerebro humano:

a) Las computadoras están expuestas a cometer "errores necios". Por ejemplo, la lectura de cientos de historias de terrorismo llevó al programa IPP (Universidad de Yale) a concluir que los terroristas irlandeses son los miembros del Ejército Republicano de Irlanda, y que el arma más importante de los terroristas neozelandeses es el bumerán.

b) Presencia de un pensamiento lineal.

c) Falta de autoconciencia.

Otro aspecto que es necesario abordar consiste en la naturaleza de la inteligencia humana. Al respecto se han erigido disímiles teorías, entre las que se destaca la "Teoría de las Inteligencias Múltiples", de H. Gardner; y la "Teoría Triárquica de la Inteligencia", de R. J. Sternberg. Este último ha señalado que "[d]urante los últimos diez años, un número de desarrollos excitantes han ocurrido en el dominio de la teoría sobre nuestra inteligencia. Nuevas teorías de la mente tales como la de Howard Gardner y la mía propia, han expandido nuestro razonamiento sobre la inteligencia y, yo creo, que nos han ayudado a darnos cuenta de que la inteligencia es un constructo más amplio de lo que pensábamos".[87]

Para Gardner, la inteligencia es la capacidad que tiene todo ser humano que le permite solucionar problemas y elaborar productos importantes para uno o varios contextos culturales. En cuanto a su dilucidación, él afirma que después de mucha reflexión y de investigaciones conjuntas, llegó a postular la existencia de siete inteligencias humanas. A su modo de ver, todos los seres humanos normales, en

[87] Comentario de R. Sternberg para su monografía "Triarchic abilities test", incluida en el libro *Creating the future: perspective on educational change*, compilado por D. Dickinson (disponible en http://www.newhorizons.org/future/Creating_the_Future/crfut_sternberg.html).

mayor o menor escala, desarrollan por lo menos estas siete formas. Así, la especie humana ha evolucionado para pensar en lenguaje, para conceptuar en términos espaciales, para analizar en formas musicales, para computar con instrumentos lógicos y matemáticos, para solucionar problemas usando todo o parte de su cuerpo, para comprender a otros individuos, y para comprenderse a sí misma.

Según Gardner, una faceta interesante y especialmente relevante de estas inteligencias es que cada una es susceptible de ser capturada en un sistema simbólico. Para decidir (en términos de este autor) si una capacidad puede ser considerada inteligencia, es necesario que responda a varios de los siguientes criterios:

a) posible aislamiento debido a un daño cerebral,

b) presencia en poblaciones especiales como los prodigios,

c) su arraigo en la historia evolutiva,

d) la existencia de una o más operaciones para el procesamiento de información,

e) la evidencia de hallazgos psicométricos,

f) la evidencia de tareas psicológicas experimentales,

g) un camino de desarrollo característico que incluye a uno o más estados extremos definibles como “expertos”, y

h) la posibilidad de codificarla dentro de un sistema de símbolos y de utilizarla en culturas diversas.[88]

Por su parte, la Teoría Triárquica de Sternberg combina la cognición y el contexto, para comprender la inteligencia humana y su desarrollo. La denominación de triárquica se debe a que está formada por tres subteorías: la componencial o académica, la contextual o práctica, y la experiencial o creativa. De acuerdo a sus investigaciones, estas tres inteligencias se comportan de manera relativamente independientes. En caso de que exista una alta correlación entre ellas, el tipo de inteligencia general resultante no se correspondería con una inteligencia general, como el factor “G” identificado por los psicómetras.

La Subteoría Componencial relaciona la inteligencia con el mundo interno de individuo, y especifica los procesos que subyacen en el procesamiento de la información. Un componente es un proceso (individual) elemental de información, que opera sobre las representaciones internas y permite traducir una entrada sensorial en una representación conceptual, para transformar ésta en otra representación o traducirla en una respuesta motriz.

La inteligencia académica distingue tres tipos de componentes que tienen un carácter integrador. En primer lugar figuran los metacomponentes, dirigidos al control de la ejecución, de las formas de representación, de la selección de una estrategia, así como al control de una proporción entre velocidad y precisión, y a la supervisión de la solución. En segundo lugar están los componentes de ejecución o rendimiento,

[88] Véase Gardner, H. (1987) *Estructuras de la mente. La Teoría de las Múltiples Inteligencias*. México: Fondo de Cultura Económica.

que constituyen procesos de orden inferior, y su cometido es realizar las tareas y ejecutar las decisiones tomadas por los metacomponentes. Aquí Sternberg incluye la codificación, la inferencia, la organización (*mapping* para descubrir relaciones entre relaciones), la aplicación, la comparación, la justificación, y la respuesta.

Finalmente, figuran los componentes de adquisición, que se emplean para adquirir información nueva y almacenarla, para recuperar la ya almacenada y transferir la aprendida. Para Sternberg existen tres componentes de adquisición: el de codificación selectiva, que separa lo relevante de lo irrelevante; el de combinación selectiva, que organiza la información en una estructura nueva integrada y de mejor comprensión; y el de comparación selectiva, que supone relacionar la información nueva con la adquirida en el pasado y almacenarla.

La Subteoría Experiencial explica qué ocurre cuando se enfrentan tareas nuevas, que exigen la puesta en escena de los componentes de adquisición (codificación, combinación y comparación selectiva). Con el paso del tiempo, el sujeto va adquiriendo experiencia hasta llegar a automatizar esas tareas. Se describen dos etapas: enfrentar tareas nuevas, e interiorizar lo aprendido con su correspondiente automatización. La resolución de tareas nuevas y su automatización tienen relación mutua de facilitación e intercambio.

Finalmente, desde la Subteoría Contextual, Sternberg pretende llenar una omisión que las teorías de la inteligencia venían cometiendo: el análisis de las variables situacionales. Las situaciones reales comportan una diversidad de variables situacionales: internas (estados emocionales y motivacionales) o externas (ruidos, interrupciones), familiares o extrañas, y favorables o desfavorables. La subteoría contextual hace referencia a la forma en que la inteligencia opera en situaciones reales y es aplicada a la experiencia con la finalidad de conseguir la adaptación al ambiente, la selección de ambientes alternativos, así como la modificación del ambiente actual.

Hace pocos años el prominente neurofisiólogo norteamericano (de origen checo) K. Pribram formuló su *Teoría Holográfica del Cerebro*, la cual asocia las funciones cerebrales con los hologramas. Estos últimos constituyen las unidades fundamentales de los microprocesadores dendríticos, en los cuales aparece almacenado el espacio, el tiempo y el espectro (modalidad sensorial y forma de información). Las cadenas de hologramas son transformables en el cerebro, gracias a la percepción y la cognición.[89]

Para Pribram el cerebro funciona con pautas de interferencia constituidas por frentes de ondas eléctricas. Estos frentes serían las excitaciones o inhibiciones de neuronas y sinapsis en el árbol de las dendritas o ramificaciones neuronales que, en conjunto, concibe como pautas de microondas. Ahora bien, ¿quién es y dónde está el observador de la imagen construida por el holograma cerebral, el “yo” que percibe? Según la teoría holográfica, el hecho de que esta información no tenga fronteras, de que cada parte envuelva y contenga la información del todo, implica que la distinción entre observador y objeto se borre. Esto es sorprendente pues significa que existe

[89] Pribram, K. H. (1991). *Brain and perception: Holonomy and structure in figural processing*. Hillsdale: Erlbaum.

una conexión intrínseca entre la conciencia y la realidad física. En resumen: no existe un yo observador en el cerebro o la mente. El holograma cerebral es a la vez físico, en tanto sucede como una interferencia de frentes de onda, y mental en el sentido de que es experimentado como una sensación, un pensamiento, un recuerdo o una emoción.

A partir de las tesis de Pribram, L. Vandervert ha desarrollado una teoría denominada "Positivismo Neurológico".[90] Esta neuroepistemología también establece que el cerebro tiene una organización holográfica, pero no impuesta en este órgano, sino resultante de una "evolución catalítica de potencia máxima". De la misma forma que las aletas del pez reflejan las propiedades hidrodinámicas del agua, la organización holográfica del cerebro representa un "diagrama de fuerzas" que refleja la propia evolución histórica de la energía necesaria para la supervivencia. Este positivismo plantea que tal organización refleja exactamente el mundo real, pero presupone que este último puede ser modelado cognitivamente en forma simbólica (v. gr. la relatividad de A. Einstein, la incompletitud–inconsistencia de K. Gödel y la incertidumbre de W. K. Heisenberg), y que el pensamiento tiene un carácter algorítmico.

En la figura 5 se ilustra un diagrama simplificado de la energía autocatalítica de retroalimentación, ilustrando la exteriorización del sistema de símbolos desde la organización algorítmica del cerebro. La apariencia de un ocho, según Vandervert, conecta mediante un lazo móvil la energía del mundo, el cerebro y la mente.

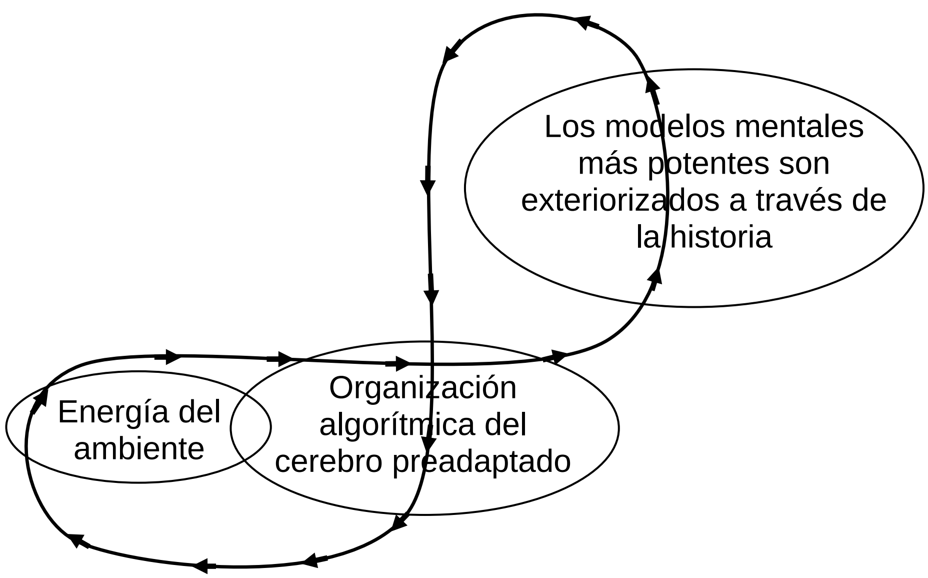

Figura 5. *La visión positivista de Vandervert*

Es interesante la manera en que Vandervert defiende sus postulados: "En el Positivismo Neurológico los algoritmos se definen como *métodos ordenados* de transferencia de energía de información que proporcionará soluciones a los

[90] Vandervert, L. R. (1993) Neurological positivism's evolution of mathematics. *Journal of Mind and Behavior*, 14 (3), 277–288.

problemas. La energía e información no pueden resolver problemas (no pueden trabajar) a menos que se transfieran de alguna manera termodinámica y algorítmica. […L]os algoritmos, la energía y la información se definen con dependencia mutua, no hay necesariamente procesos no algorítmicos de resolución de problemas en el cerebro”.[91] A partir de sus postulados, Vandervert explica que los esquemas simbólicos de la Matemática son formas simbólicas puras de la organización algorítmica del cerebro; argumentando, por ejemplo, que no puede ser casual la inestimable aplicación del lenguaje matemático a la formulación de las leyes físicas.

Aunque las ideas desarrolladas por esta neuroepistemología se sustentan sobre investigaciones neurológicas de avanzada, es necesario señalar que trata de formalizar en sumo grado los problemas gnoseológicos, con una marcada tendencia a rechazar el psicologismo y a desterrar de la Filosofía la eterna antítesis entre materialismo e idealismo. Además, la “naturaleza simbólica” del pensamiento no va más allá de una versión moderna de la extinta *Teoría de los Jeroglíficos*. De todas formas, un elemento positivo consiste en reconocer la existencia de una unidad holística que relaciona la mente, el cerebro, la conducta y el medio ambiente.

Otro caso singular corresponde a Jeff Hawkins[92], para el cual el cerebro funciona a base de reconocimiento de patrones. Para ello desarrolla unos algoritmos suficientemente generales, de manera que se puedan reconocer y aprender imágenes, sonidos, el lenguaje, etcétera. Según Hawkins, cada paso desde la información “cruda” hasta la idea abstracta se basa en el mismo algoritmo. El papel de cualquier región del córtex, consiste en averiguar qué relación hay entre sus *inputs,* memorizarla y usar esa memoria para predecir cómo se comportarán los *inputs* en el futuro.

Hawkins cree que su teoría podría convertirse en la norma unificadora. Afirma que tuvo una revelación a mediados de la década de los 80 mientras caminaba hacia la puerta de su oficina en su casa de Mountain View, California. En ese preciso momento, se preguntó qué pasaría si la puerta cambiara, por qué se daría cuenta. Y se contestó: “Me daría cuenta del cambio porque mi cerebro ya predecía qué aspecto tendría la puerta. Los cerebros no son como las computadoras, a las cuales uno introduce símbolos, y luego sale de ellas algo diferente. En lo que al cerebro se refiere, todo son patrones de información”.[93]

Como se ha podido apreciar, múltiples han sido los intentos por develar la naturaleza del pensamiento humano. Ya la idea de un “cerebroscopio” fue adelantada por el filósofo austriaco, H. Feigl (1902–1988, miembro del Círculo de Viena), como un experimento mental para defender la idea de que la mente y el cerebro son una sola cosa. Imaginó a un científico que desarrolla una máquina de registro cerebral cuya información pudiera hacerse coincidir con los eventos mentales. Para ello, el científico, debe aplicar el aparato a su propio cerebro y anotar, momento a momento,

[91] Vandervert, Ibíd., p. 278.

[92] Jeff Hawkins es el inventor de la Palm Pilot y uno de los creadores informáticos y empresarios de más éxito de Silicon Valley (California). Fundador de Palm Computing, de Handspring y del Instituto Neurocientífico Redwood, cuyo objetivo es promover las investigaciones sobre la memoria y el conocimiento. Miembro del departamento científico del Cold Spring Harbor Laboratory.

[93] Véase Hawkins, J. y Blakeslee, S. (1995) *Sobre la Inteligencia*. Madrid: Espasa Calpe.

los aconteceres de su mente y correlacionarlos con el registro del cerebroscopio. De esta manera irá encontrando “leyes psicofísicas” que le permitan saber que un registro determinado corresponde a tal emoción, imaginación o pensamiento.

Esto es teóricamente posible y cabe recordar que el descubrimiento del electroencefalograma por H. Berger, en los años treinta, se debió a una idea de construir precisamente una máquina que revelara la mente mediante el registro de las corrientes cerebrales. Berger hubo de desilusionarse porque el registro del electroencefalograma no tendría una correlación precisa con estados mentales, aunque su descubrimiento inició una época maravillosa para la neurofisiología.

En la actualidad existen dos técnicas de gran interés para el análisis del funcionamiento del cerebro. La primera es heredera precisamente del aparato de Berger y consiste en hacer mapas de la actividad eléctrica o magnética del cerebro y filmarlos en tiempo real. La segunda consiste en hacer mapas de la actividad metabólica del cerebro, al introducir moléculas químicas radiactivas al organismo y registrar la radiactividad a través del cráneo, mientras los sujetos realizan operaciones mentales.

Estas “imágenes cerebrales” han reafirmado la localización precisa de operaciones mentales como la percepción, el pensamiento y la emoción, y se acercan con inmensas perspectivas a la idea de Feigl de establecer correlaciones entre la mente y el cerebro. Al menos de dónde y cuándo se efectúan actividades mentales precisas, sin embargo aún están lejos de saber cómo. Falta mucho por recorrer, no sólo en las técnicas neurofisiológicas sino también en el análisis de la conciencia.

Bibliografía para el capítulo 2

Brailowsky, S., Stein, D. y WiII, B. (1992), *El cerebro averiado*. México: FCE.

Celada, J. y Cairo, E. (1990) *Actividad psíquica y cerebro: Investigación clínica y fundamentos*. Serie Neuropsicología y rehabilitación, Vol. 3, Lima.

Davis, G. & Scott, J. (1973) *The understanding of the brain*. NuevaYork: MacGraw Hill.

Dennett, D. C. (1991) *Consciousness explained*. Boston: Little Brown.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice.* NY: Basic Books.

Gardner, H. (2000) *Mind and brain: only the right connections review* of *what makes us think?* (http://www.pz.harvard.edu/PIs/HG_Changeux.htm).

Gazzaniga, M. S. (1988) *Mind Matters. How Mind and Brain Interact to Create our Conscious Lives*. Boston: Houghton Mifflin.

Grafman J., Holyoak, K. and Boller, F. (1995, Eds.) *Structure and functions of the human prefrontal cortex*. Volume 769, New York: New York Academy of Sciences.

Guilford, J. P. (1972) *La naturaleza de la inteligencia humana*. Biblioteca de Psicometría y Psicodiagnóstico, Buenos Aires.

Harvey R. J. (1966) *La Evolución de la Mente y el Pensamiento Humano*. México: Limusa Wiley.

Hawkins, J. y Blakeslee, S. (1995) *Sobre la Inteligencia*. Madrid: Espasa Calpe.

Jerison, H. J. (1973) *Evolution of the Brain and Intelligence*. NY: Academic Press.

Lenin, V. I. (1909/1990) *Materialismo y empiriocriticismo*. La Habana: Pueblo y Educación (§ 5 ¿Piensa el hombre con la ayuda del cerebro?, pp. 77–85).

Luria, A. R. (1979) *El cerebro en acción*. Barcelona: Fontanella.

Mora, F. (2001) *El reloj de la sabiduría. Tiempos y espacios en el cerebro humano*. Madrid: Alianza,

Ornstein R.E. (1973, Ed.) *The nature of human consciousness*. San Francisco: Freeman.

Sternberg, R. J. (1985) *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1989) *Inteligencia Humana 4. Evolución y desarrollo de la Inteligencia*. Buenos Aires: Paidós.

Sternberg, R. J. & Grigorenko, E. L. (2000) *Teaching for successful intelligence: To increase student learning and achievement*. Arlington Heights, IL: Skylight Professional Development.

Young, J. Z. (1978/1986) *Los programas del cerebro humano*. México: FCE.

3. CONCEPTOS Y PROCESOS BÁSICOS

Erigir el sustrato teórico de la RP siempre constituye un desafío. Son múltiples y heterogéneos los aspectos que merecen dilucidación. En general es necesario buscar argumentos de orden filosófico, psicológico y didáctico, para responder disímiles problemáticas epistemológicas que se presentan. Es necesario esclarecer conceptos difusos como “problema matemático”, y develar procesos complejos como “desarrollo cognoscitivo humano”. También es preciso deslindar cómo debe enfocarse la RP en el contexto escolar. ¿Se trata de una habilidad, una capacidad o una competencia? Todo esto constituye una premisa esencial para el esclarecimiento de la actividad de RP, su enseñanza y aprendizaje.

§ 3.1 Epistemología de la resolución de problemas

Tratar de elaborar una plataforma teórica para explicar el complejo proceso de RP es un reto. Algunos investigadores asumen modelos teóricos de otras disciplinas (ajenas incluso a la DM), con la intención de encontrar modelos que sirvan para tal propósito. Un caso muy conocido ha sido la importación realizada por H. Steiner del “principio de complementariedad”, perteneciente a la Mecánica Cuántica[94]. Este

[94] Este principio fue enunciado por N. Bohr en 1928 y afirma que los fotones y los electrones actúan unas veces como ondas y otras como partículas, pero estas propiedades no pueden observarse simultáneamente, aunque son complementarias entre sí y necesarias para una interpretación correcta.

principio ha constituido una herramienta adecuada para interpretar las relaciones entre los diferentes tipos y niveles de conocimiento y actividad, puestos en contraposición.

En términos lógicos, si se considera U como el universo de fenómenos que se dan en DM, estos pueden estar caracterizados por la teoría X o la teoría Y. Si ambas teorías verifican los principios de no contradicción y del tercero excluido, y cumplen que su intersección es vacía y que su unión explica completamente a U, entonces son teorías complementarias. La complementariedad puede verse en la contraposición establecida entre el paradigma cualitativo y el cuantitativo, entre teoría científica y conocimiento empírico, entre metaconocimiento y conocimiento primario, etcétera.

Un análisis objetivo del proceso de RP demanda el estudio del contenido y la forma en que este tiene lugar. Tal análisis debe comenzar por las complejas disquisiciones filosóficas relativas a la Matemática, y particularmente a su epistemología. No se trata de asumir tácitamente el materialismo dialéctico, para luego no ser lo suficientemente consecuente con él. La complejidad que encierra la RP matemáticos es notable, de manera que el establecimiento de sus fundamentos constituye una tarea difícil.

Algunas preguntas tales como ¿la Matemática es exacta e infalible, o falible, perfectible, evolutiva y provista de significado como las demás ciencias? y ¿la Matemática es una creación del hombre o existen fuera de la mente humana?, pueden servir de base para el estudio de las creencias y concepciones que los estudiantes tienen sobre los problemas. Por su parte, otras preguntas tales como ¿qué es el álgebra escolar? o ¿qué es aprender Matemática?, muestran la necesidad de replantear muchas hipótesis sobre el proceso enseñanza–aprendizaje de esta ciencia.

La Matemática ha sido enfocada desde disímiles presupuestos filosóficos. Resalta desde tiempos remotos el “Platonismo”, donde esta ciencia constituye un sistema de verdades absolutas que han existido siempre e independientemente del hombre. Innumerables hechos empíricos revelan que algunos estudiantes y profesores asumen (ocasionalmente o no) posiciones platónicas respecto a los problemas. Por ejemplo, en una clase el maestro pregunta al alumno: ¿no entiendes este problema?, mientras señala con su dedo índice la orden que aparece en la libreta. También suele ocurrir que un alumno le diga un compañero: ¡te he traído un problema!, mientras le muestra un papel escrito. ¿Acaso el problema constituye un objeto que existe fuera e independientemente de la conciencia humana? Aquí se pone de relieve una vez más la necesidad de esclarecer los presupuestos filosóficos de la RP.

A comienzos del siglo pasado existió inquietud por esclarecer las dudas sobre la naturaleza epistemológica de la Matemática en su modelo euclídeo. Tres programas trataron de sanear las fisuras de sus fundamentos: el “Logicismo” de B. Russell, el “Formalismo” de D. Hilbert, y el “Intuicionismo” de L. E. J. Brouwer. Para el primero la Matemática es una rama de la Lógica; para el segundo constituye una creación de la mente humana y existe solamente en axiomas, teoremas, etcétera; y para el tercero son un fruto de la elaboración mental, a partir de lo que se percibe mediante los órganos de los sentidos, así como el propio estudio de esas construcciones mentales. Los tres intentos fracasaron y la Matemática, en lugar de seguir buscando su afirmación en el supuesto modelo perfecto (euclídeo) de la ciencia por excelencia, aceptó como más plausible el enfoque empirista.

En efecto, respecto a las teorías o grandes sistemas proposicionales, los patrones específicos de ordenación del conocimiento complejo y organizado determinan, junto con el nivel en el que son introducidos los valores de verdad, los distintos tipos epistemológicos: teorías euclídeas, teorías empíricas y teorías inductivas. Estas son diferentes porque determinan de manera distinta el patrón organizativo de las distintas proposiciones que contienen, así como el flujo de verdad o falsedad del sistema. En el caso particular de las euclídeas "[e]l significado, lo mismo que la verdad, se inyecta en la cúspide y fluye hacia abajo de modo seguro por los canales preservadores del significado de las definiciones nominales, desde los términos primitivos hasta los últimos definidos. Una teoría euclídea es *eo ipso* consistente pues todas las proposiciones que ocurren en ella son verdaderas".[95]

Respecto a las teorías empiristas hay que aclarar que no es igual a empíricas en el sentido sensorial, sino que hacen alusión a la situación de los valores de verdad y su flujo, de modo que si en la base hay proposiciones falsas el sistema deductivo que articula la teoría trasmite falsedad a los resultados, pero si hay verdad en la base no se puede asegurar que los resultados sean verdaderos. Son teorías que se pueden "falsear" o refutar pero no probar. Lakatos lo define así y lo resume del siguiente modo: "Mi única condición para que una teoría sea empirista estriba en que el valor de verdad esté inyectado en la base, cualquiera que ésta sea, 'fáctica', 'espacio–temporalmente singular', 'aritmética' o lo que se quiera".[96]

En esta visión la fuente de la que provenga la inyección de verdad es secundaria, no importa si la verdad fluye de la experiencia, o de la autoevidencia, lo que importa es cómo fluye. Así el tipo de verdad inyectada no cambia el paradigma y es análogamente empirista el fluir de la verdad lingüística de L. Wittgenstein y el de la verdad lógica de Russell, el de la falsedad y "verosimilitud" de K. Popper o el de la probabilidad de R. Carnap.

La tercera opción es el inductivismo, que pretende el ascenso de la verdad desde la base hasta la cúspide, y así establecer un principio lógico de retransmisión de la verdad. El paso de los principios induccionistas a una prueba lógica ha fracasado. Aun Russell que lo intentó con su "construccionismo" no pudo resolver el problema de la "definición inductiva".

En cuanto a la clasificación epistemológica de la Matemática actualmente no puede sintetizarse en una de estas tres corrientes, pero a través de los neoempirismos de Russell, Quine, Carnap y fundamentalmente de Popper se llega a desterrar el modelo euclídeo y a proponer que "bajo la influencia de la crítica moderna de sus fundamentos, la Matemática había perdido ya gran parte de su 'certeza absoluta' y que en el futuro, debido a la aparición de nuevos axiomas de la

[95] Lakatos, I. (1981) *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid: Alianza Universidad, pp. 17–18.
[96] Ibíd., p. 19.

teoría de conjuntos, sería cada vez más falible”.[97] Esto indica que se ha evolucionado desde una teoría euclídea hacia una teoría empírica o cuasi–empírica.

Lakatos asume el modelo cuasi–empirista (muchos lo clasifican como moderado). En las teorías de Lakatos no se sabe nunca, solo se conjetura. Por tanto, la pregunta clave que sustituye a ¿se puede conocer? consiste en ¿se pueden mejorar o no las conjeturas? “Los escépticos seguirán preguntándose ¿cómo sabemos que mejoramos nuestras conjeturas?, pero ahora la respuesta es fácil: lo conjeturamos, no hay nada incorrecto en una regresión infinita de conjeturas”.[98] Si se puede afirmar que la Matemática ha evolucionado desde el ideal euclídeo al empírico, es porque su metodología y objetivos han ido cambiando paulatinamente.

A pesar de haber predominado por siglos, la perspectiva platónica debió ceder terreno a otros paradigmas menos absolutistas. Uno de los movimientos que ha intentado reformar la enseñanza de las ciencias lo constituye la “Pedagogía Constructivista”, que es diametralmente opuesta por naturaleza.[99] Muchos estudios empíricos han demostrado que existe un vínculo entre los profesores que poseen una visión absolutista de la Matemática y una enseñanza basada en el fracasado modelo de transmisión–recepción. De la misma manera existe un vínculo entre los que poseen una visión falibilista y una enseñanza constructivista. Sin embargo, los propios estudios revelan que estas relaciones no son totalmente directas.[100]

Sobre la base de esta nueva concepción de la Matemática se han erigido varias corrientes en la actualidad, las cuales repercuten con mucha fuerza en la DM mundial. A continuación se describen las tres predominantes, ora por el número de publicaciones afines, ora por la presentación de memorias en eventos internacionales (especialmente los ICME). No es posible establecer un orden claro en la fecha de aparición de estas corrientes, pues la historiografía de cada una tiene raíces que se entremezclan. Se ha optado por enumerarlas según el año en que sus figuras más emblemáticas publicaron sus obras más conocidas.

La primera corriente se adscribe al enfoque antropológico, como base epistemológica de la DM. Se trata de la “Etnomatemática” de U. D’Ambrosio, cuya principal novedad consiste en el cambio de planteamientos en relación a la posibilidad y entidad del conocimiento matemático. Este último es posible e inseparable de sus productores, de manera que asume una posición dogmática. Además, el conocimiento matemático tiene sentido, validez, y se encuentra integrado en cada cultura inseparablemente. Los juicios sobre la validez son “locales” no “universales”. Por lo tanto, también se trata de una corriente pragmática que atribuye el poder de validar a la comunidad científica, en su contexto histórico concreto.

[97] K. Gödel, 1944; citado por Lakatos, Ibíd., p. 45.
[98] Lakatos, Ibíd., p. 24.
[99] Junto a este gigantesco movimiento se han identificado otros dos: “Historia y Filosofía de la Ciencia” y “Ciencia, Tecnología y Sociedad”. Véase un análisis de sus aspectos positivos y negativos en: Turner, S. & Sullenger, K. (1999) Kuhn in the classroom, Lakatos in the lab: Science educators confront the nature–of–science debate. *Science, Technology & Human Values*, 24 (1), 5–31.
[100] Véase, por ejemplo, Roulet, G. (1992) The philosophy of mathematics education: What does this mean for the child in the classroom? *Philosophy of mathematics education newsletter*, 6, 8–9.

D'Ambrosio establece una conexión directa entre epistemología y Etnomatemática, cuando presenta dicha corriente como un programa teórico y una práctica pedagógica interesada en cuestiones tales como: ¿de dónde vienen las ideas matemáticas?, ¿cómo están organizadas?, ¿cómo avanza el conocimiento matemático?, y ¿tienen estas ideas algo que ver con el entorno en su conjunto, sociocultural o natural?[101]

M. Borba, por su parte, pone de relieve dos aspectos esenciales de esta corriente: los conceptos de "problema" y "diálogo", como partes integrantes de su visión de los seres humanos; así como la relación entre esta visión y la Etnomatemática. El primero de estos conceptos es esencial para la RP y será retomado en el siguiente epígrafe. Por su parte, este autor afirma que el diálogo es una relación intersubjetiva en la que se emplean signos tales como palabras, gestos, pausas, etcétera; los cuales sirven de indicadores culturales de los que están dialogando. "El simple hecho de dar nombre a una cosa muestra su importancia en una cultura dada".[102] El conocimiento matemático queda ligado al lenguaje, así como a la cultura del que lo "crea" o lo "reconstruye"; por tanto, tiene un carácter relativo.

Todas las culturas hacen Matemática, aunque la expresen en lenguajes específicos. "El conocimiento matemático, expresado en el código lingüístico de un grupo sociocultural dado, es llamado 'Etnomatemática'. En este contexto 'etno' y 'matemática' deberían adquirir un sentido amplio […] 'matemática' debe considerarse como un conjunto de actividades tales como cifrado, medida, clasificación, ordenación, inferencia y modelación".[103]

Es evidente que esta epistemología antropológica tiene claras implicaciones para la educación. Si personas diferentes producen distintos tipos de matemáticas, no es posible pensar en una educación con procesos uniformes que se desarrollen en el mismo sentido por diferentes grupos. La DM debería desarrollarse teniendo en cuenta las peculiaridades culturales de cada grupo social, desde una perspectiva multicultural.

Para que los educadores desarrollen puntos de vista basados en la Etnomatemática, es importante considerar los conceptos de diálogo social y de problema. Se podrían encontrar problemas basados en las etnomatemáticas, evitando el uso de pseudo–problemas. Los problemas a resolver podrían ser elegidos tanto por los estudiantes como los profesores, a través de un diálogo que fortalezca y aliente una conciencia crítica. El conocimiento puede considerarse como un producto de esta relación dialéctica a través del diálogo. Ambas partes aprenderían una de la otra.

Un diálogo en el que el profesor se exprese desde sus supuestos etnomatemáticos mientras los estudiantes lo hagan desde los suyos, produce conocimiento matemático y puede conducir a que los educandos afiancen sus raíces socio–culturales. Así, sus conocimientos "etno" serían legitimados, reconocidos y valorados, en el proceso educacional. La DM partiría del supuesto de que la

---

[101] D'Ambrosio, U. (1994) Cultural framing of mathematics teaching and learning. In: R. Biehler et. al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (p. 454). Dordrecht: Kluwer.
[102] Borba, M. (1990) Ethnomathematics and Education, *For the Learning of Mathematics* 1 (10), p. 39.
[103] Ibíd., p. 40.

Matemática no es una expresión única y excluyente, sino que se construye socialmente.

La segunda corriente se deriva particularmente de la anterior y aparece encabezada por la obra de O. Skovmose, el cual fundó su "Matemática Educativa Crítica"[104], a partir de la Teoría Crítica de la Escuela de Frankfurt[105]. En Skovmose resalta una visión histórica del término "criticismo", mostrada por E. Kant y G. Hegel, e interpretado por C. Marx. Él va más allá respecto al significado de este término, retomando las ideas de la Escuela de Frankfurt (particularmente M. Horkheimer y H. Marcuse), y haciendo una distinción entre los conceptos de crisis, criticismo y emancipación.[106] Sobre la base de estos conceptos se erige una DM de profundas raíces humanistas, destacando los diferentes caminos a través de los cuales se desarrolla la sociedad, desentrañando el papel de la escuela en este desarrollo, y proveyendo a los estudiantes con competencias que les faciliten identificar y reaccionar ante los problemas que le depara la vida.

En tercer lugar se erige el "Constructivismo Social" de P. Ernest, perspectiva falibilista[107] basada en el convencionalismo de L. Wittgenstein[108] y el cuasi–empirismo de Lakatos. Los supuestos ontológicos del Constructivismo Social llevan a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos son considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos, ligados a las actividades de RP que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo.[109]

Ernest resalta un grupo de problemas filosóficos relevantes para la DM, entre los que figuran: ¿qué postulados filosóficos, posiblemente implícitos, sostienen la enseñanza de la Matemática?; ¿son válidos estos postulados?; y ¿cuáles recursos son adoptados para llevar a cabo los objetivos de la enseñanza de la Matemática?[110] Después de criticar el absolutismo y la falacia de los programas euclídeos, expone su criticismo desde una perspectiva falibilista.

Es presumible que cualquier reconstrucción de la DM, tomando como base alguna de estas corrientes, abrirá un inmenso campo de problemáticas interesantes para la ciencia. Uno de estos desafíos ha sido asumido por los defensores de la

---

[104] Véase Skovsmose, O. (1994) *Towards a philosophy of critical mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[105] Principalmente las obras de Marcase, Adorno y Habermas, aunque se basó también en otros filósofos críticos de las tecnologías como Ellul. Véase http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome/pomprt10.htm

[106] Ibíd., § 1.6.

[107] Ernest precisa que se trata de un tipo especial de falibilismo (él describe tres), para el cual los conceptos, definiciones y reglas de la Matemática son inventadas y desarrolladas por milenios, incluyendo las reglas de la verdad y de las demostraciones.

[108] Ernest asume particularmente sus nociones de "juego de idioma" y "formas de vida". Wittgenstein subrayaba la esencia constructivista de la Matemática: "Se habla de descubrimientos matemáticos. Una y otra vez trato de mostrar que lo denominado descubrimiento matemático sería mucho mejor llamarlo invento matemático" (*Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics*. Ithaka, 1976, p. 22).

[109] Véase Ernest, P. (1991) *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

[110] Ibíd., pp. XII–XIII.

denominada “Didáctica Fundamental”, la cual será tratada más abajo, de manera que el abordaje de la RP se presente como una perspectiva no tradicional.

Siguiendo por los senderos de las disquisiciones filosóficas, a continuación se examinará la cuestión relativa a la concepción matemática de los problemas. En general, estos pueden ser enfocados como objetos matemáticos, lo cual constituye “el emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos”.[111] Chevallard llama “praxema” a los objetos materiales ligados a las prácticas y utiliza esta noción para definir un objeto como emergente de cierto sistema de praxemas. Este autor no se interesa por la noción de significado de un objeto, centrando su atención, por el contrario, en una nueva noción teórica que domina relación al objeto (*rapport al' objet*) sobre la que apoya su teoría del conocimiento, o más bien, su antropología cognitiva.

En este marco teórico un objeto existe desde que una persona o institución reconoce este objeto como existente para sí. La distinción entre el dominio de lo personal, de lo institucional, y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de esta antropología cognitiva. Un énfasis excesivo sobre el plano institucional puede ocultar la esfera de los procesos cognitivos, los cuales quedan diluidos en la perspectiva de Chevallard. Sin embargo, es relevante la diferenciación que se establece entre objeto institucional, como base del conocimiento objetivo, y objeto personal, cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil que sirve entre otras cosas para explicar la diferencia entre el concepto y la concepción del sujeto. Todos estos hechos justifican que un mismo problema puede aparecer durante la realización de objetivos docentes o científicos, llevar el sello personal de su autor, a la vez que su relevancia adquiere magnitud variable atendiendo a la época y al contexto sociocultural donde surge.[112]

Resolver problemas es un signo distintivo de la actividad matemática. Ernest identificó tres concepciones generales de esta actividad: la platónica, la instrumental y la de RP.[113] En este trabajo se enfatiza esta última, por considerar la Matemática como una disciplina dinámica y cambiante, la cual está en constante desarrollo y reajuste ante las nuevas situaciones problémicas. La perspectiva platónica es idealista subjetiva y se desecha totalmente. La instrumental se inscribe en una visión pragmática pero no es posible desecharla del todo pues se estaría negando un papel esencial de la Matemática, reflejado en el desarrollo de habilidades para resolver problemas prácticos, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos, y para desarrollar el pensamiento lógico–formal.

Todavía desde la perspectiva que aquí se enfatiza es necesario hacer otra precisión. En efecto, algunos autores suponen que la RP va dirigida a comprender mejor la Matemática; mientras que otros asumen que la comprensión de esta ciencia consiste

---

[111] Chevallard, Y. (1991) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, p. 8.
[112] Cf. Díaz, G. J. y Batanero, M. C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Reserches en didactique de mathématiques*, 14 (3), 325–355.
[113] Ernest, P. (1989) The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *British Educational Research Journal*, 15 (1), p. 21.

en poder llegar a resolver mejor los problemas. A juicio del autor, esta visión engloba un amplio espectro de la actividad matemática, pero todavía requiere de un análisis más profundo. Según W. T. Gowers, a pesar de que ambos postulados "tienen algo de verdad", para varios eminentes matemáticos (y se refiere particularmente a M. Atiyah) hacer matemáticas no supone una meta en particular, excepto "la meta de comprender la Matemática".[114]

Otro aspecto importante, relativo a la filosofía de la Matemática, dimana de la interrogante: ¿todo problema tiene solución?. En vista de que todo el conocimiento matemático refleja propiedades intrínsecas de la realidad objetiva, la respuesta estará condicionada por la conocida controversia entre los representantes del materialismo dialéctico –quienes afirman que el mundo es cognoscible– y los agnósticos –quienes afirman que o bien no se puede conocer o, al menos, no se sabe qué se puede y cuándo se conoce–, lo cual constituye un tema básico de la epistemología.

Como muestra de este problema en Matemática, con un marcado intuicionismo, Brouwer solía "demostrar" la inconsistencia de los razonamientos basados en el infinito actual, mediante un ejemplo relativo al desarrollo decimal del número π. Para defender sus criterios, él solía afirmar que es imposible decidir si en dicho desarrollo existen diez novenas seguidas. Hace pocos años, en la Universidad de Columbia, tras calcular más de mil millones de cifras de π con una computadora "CRAY–2", se observó que desde el lugar 762 hasta el 767 existen seis novenas seguidas, lo cual advierte del peligro que entraña tan categórica afirmación.[115] Con una concepción distinta a la de Brouwer, Hilbert profirió públicamente: "Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el *ignorabimus*".[116]

Las doctrinas del materialismo dialéctico inclinan la balanza hacia los postulados de Hilbert. Esto no excluye la posibilidad de que, en determinado momento histórico, no estén dadas las condiciones objetivas y subjetivas para resolver un problema (*ignoramus*). La historia de la Matemática está colmada de ejemplos, como el teorema fundamental del Álgebra hasta los tiempos de Gauss; o el "Gran Teorema de Fermat", hasta hace poco más de una década, con los trabajos de A. Wiles. No obstante, es en el conocimiento del mundo real donde el *ignorabimus* no existe. Es necesario recordar que la publicación del primer teorema de Gödel, en 1931, sacó a colación la existencia de límites ontológicos en cualquier axiomatización. Una consecuencia metodológica muy peculiar consiste en la existencia de proposiciones

---

[114] Gowers, W. T. (2000) The two cultures of mathematics. In: V. Arnold et al. (Eds.). Ibíd., p. 66.

[115] Actualmente se conocen 1 241 100 000 000 lugares decimales del número π. Este record se debe al japonés Yasumasa Kana, el cual se basó en un algoritmo creado en 1986 por los hermanos Jonathan y Peter Borwein, utilizando para ello una computadora HITACHI SR8000/MPP en la Universidad de Tokio (*Guinness World Records*). La persona que ha conseguido memorizar más decimales es Akira Haraguchi, un japonés de 59 años, que en julio de 2005 batió el récord del mundo al recitar 83 431 dígitos de memoria, para lo que necesitó más de 13 horas.

[116] Histórico discurso pronunciado en el II congreso de la IMU, París, 8 de agosto de 1900. Tomado de *Fundamentos de la Geometría*. Apéndice X, CSIC, Madrid, 1991.

indemostrables e irrefutables en el marco de sistemas formalizados. La autenticidad de tales afirmaciones sólo puede ser constatada por vías no formales. Por este motivo, los teoremas de Gödel echaron por tierra el programa formalista del eminente matemático alemán.

Desde la perspectiva psicológica, un camino adecuado para estudiar el proceso de resolución de problemas, es el enfoque histórico–cultural de Vigotsky. Desde esta perspectiva, se enfatiza la naturaleza social del desarrollo psíquico del hombre, así como la unidad entre psiquis y actividad. El principio fundamental que sustenta este enfoque consiste en que los procesos mentales pueden nacer en la actividad planificada, para luego convertirse en órganos funcionales de la propia actividad. Sin embargo, en el contexto escolar no todo se puede enseñar, pues el desarrollo no depende directa y linealmente de la enseñanza aunque esta, en última instancia, conduzca al desarrollo.

Uno de los principales aportes de la obra de Vigotsky consiste en la noción de "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP) que expresa la relación interna entre la enseñanza y el desarrollo. En su versión clásica, este concepto se caracteriza por la necesidad de una relación asimétrica novato–experto, como génesis (en el primero) de los procesos psicológicos superiores; y también por la aparición de una potencialidad, como emergente de esta relación. Aquí se manifiesta la ley genética del desarrollo, que postula que todo proceso psíquico aparece dos veces: primero en una relación interpersonal, después como dominio intrapersonal.

R. Corral ha planteado que "[…l]a relación interpersonal que postula la ZDP produce un emergente, un resultado que no puede ser fundamentado en la herencia filogenética, sino en la cultura compartida; la potencialidad emerge de una ejecución que no está prevista en la maduración organísmica, bien por la reorganización de funciones naturales en la dirección de ejecutar tareas culturales, bien por la aparición de funciones psíquicas que no tienen antecedentes naturales. La cultura compartida, condensada en sistemas simbólicos, actúa como una estructura yuxtapuesta sobre la estructura del organismo, usándola, desviándola y hasta creando nuevas funciones –las funciones psíquicas superiores– por reorganización e instalación".[117]

Junto a la interpretación clásica, actualmente se han dado otras dos interpretaciones de la ZDP. En una se parte de la distancia entre los conceptos cotidianos y los conceptos científicos, explorando el camino de unos a otros; en la otra se identifica la diferencia entre sujeto individual y sujeto colectivo, y la posibilidad de crear nuevas extensiones a la cultura. Las tres formas son aceptables, pero aún requieren de una mayor precisión conceptual y metodológica. Por ejemplo, para poder comprender profundamente la categoría de ZDP hay que relacionarla, de manera plena e integrada, con el concepto "Situación Social de Desarrollo". La separación de este par dialéctico conduce a una interpretación abstracta y limitada de la ZDP, pues se pierde de vista el complejo sistema de influencias y autoinfluencias que actúan sobre el estudiante antes y después de la clase.

[117] Corral, R. (1999) Las "lecturas" de la zona de desarrollo próximo. *Revista Cubana de Psicología*. 16 (3), pp. 201–202, Universidad de la Habana.

En la figura 6 Gallimore y Tharp[118] ilustran el progreso experimentado al pasar de la ayuda externa a la interna (niveles I y II). Una vez que el contenido ha sido asimilado, nuevos motivos impulsan al sujeto a continuar su desarrollo cognoscitivo, requiriendo nuevamente de ayuda. En la medida que este proceso tiene lugar, el novato dependerá menos del experto, de manera que el lazo recurrente tenderá gradualmente hacia el nivel II (lo cual no niega posibles regresiones). Bajo esta concepción es posible comprender los mecanismos de desequilibrio y reacomodo vistos por Piaget, pues el primero puede ocurrir durante el tránsito III–IV al surgir una nueva situación problémica, en tanto el segundo resulta de la transición II–III. De esta manera es posible concebir el desarrollo como un proceso que, en sí mismo, genera desarrollo.

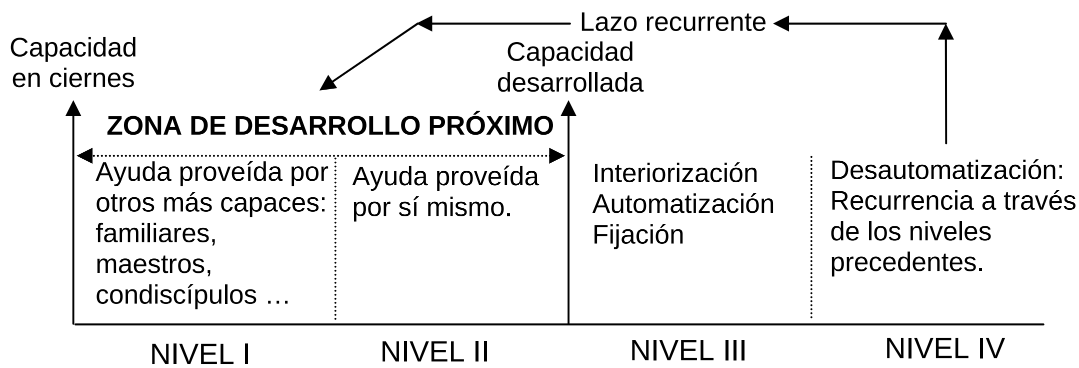

Figura 6. *Génesis del desarrollo cognoscitivo humano*

La transición por los cuatro niveles y la iteratividad del lazo pueden ilustrarse de muchas maneras. Por ejemplo, en la medida que el alumno se apropia del concepto función, la consideración de nuevas correspondencias le facilitará el estudio de nuevas propiedades. El trabajo sobre la ZDP puede verse tras el desequilibrio que ocasiona la existencia de entes desconocidos. Así ocurre con las funciones exponenciales en onceno grado, al considerar la posibilidad de variar el exponente de a^b para valores constantes de la base (situación problémica que propicia el tránsito IV–I).

En esta ocasión el alumno dependerá menos de la ayuda externa, por cuanto su experiencia acumulada durante el estudio de otras funciones le llevará de inmediato al análisis de varias propiedades. Incluso, puede llegar a observar el acercamiento asintótico que experimenta el gráfico, lo cual constituye una nueva propiedad (tendencia del lazo hacia el nivel II). La ejercitación subsiguiente facilitará la fijación del concepto (nivel III). No obstante, en la misma unidad temática ocurrirá un nuevo desequilibrio, al emerger la necesidad de abordar la función logarítmica como inversa (nuevamente el tránsito IV–I, pero cualitativamente superior).

[118] Gallimore, R. & Tharp, R. (1990) Teaching mind in society: Teaching, schooling, and literate discourse. In L. C. Moll (Ed.): *Vygotsky and education. Instructional implications and applications of sociohistorical psychology* (p. 185). Cambridge: Cambridge University Press.

El hecho de que en el gráfico anterior se integren algunas ideas de Piaget y Vigotsky contrasta con hipótesis opuestas que saltan a la vista: por un lado el desarrollo se prolonga en el aprendizaje (un mecanismo interno para el desarrollo y el aprendizaje), mientras que por el otro el aprendizaje va orientando el desarrollo (un proceso de internalización de la cultura). Sin embargo, ambas teorías no son incompatibles ni tampoco complementarias.

J. A. Castorina y sus colaboradores[119] han señalado que la cuestión básica acerca de si son incompatibles o no estriba en preguntarse si ambos autores se plantearon el mismo problema respecto al desarrollo cognitivo. Para Vigotsky los sistemas de signos emergentes de la cultura no son simples facilitadores del desarrollo cognitivo, sino formadores de la actividad psicológica. De aquí se concluye, según M. Socas[120], que Vigotsky se limita a precisar cómo los individuos pertenecientes a una determinada cultura llegan a controlar el correspondiente sistema de signos y cómo estos últimos llegan a ser internalizados. La indagación básica de Piaget está vinculada a la problemática epistemológica, relativa al tránsito de un estado menor a otro mayor de conocimientos, a la búsqueda de la evidencia del desequilibrio. Para Socas no parece una tesis adecuada el afirmar o refutar una teoría en el marco de la otra, pues Piaget no pretende responder a la pregunta: ¿cómo se constituye la subjetividad de la internalización de la cultura?; mientras que Vigotsky tampoco pretende responder a ¿cómo cambia el punto de vista del sujeto en la constitución del objeto del conocimiento?[121]

Con el objetivo de analizar la complementariedad de ambas teorías, Socas muestra tres ejemplos donde el primero es explicable desde la hipótesis de la regulación, el segundo a través de la del conflicto socio–cognitivo, mientras que el último no es explicable por ninguna de ellas. Se trata respectivamente de situaciones donde tres parejas de estudiantes se ven inmersas en un trabajo cooperativo. En la primera pareja un estudiante enseña al otro; en la segunda existen puntos de vista moderadamente divergentes; pero en la tercera existe una plena coordinación entre las tareas, un control sinalagmático y un reparto de responsabilidades. En esta última situación se pone de relieve una cooperación mutua entre parejas, la cual no se explica con suficiente claridad desde ninguna de las dos teorías. Esto constituye un sólido fundamento para afirmar que estas teorías no son complementarias.

Uno de los grupos de trabajo del ICMI es el PME (International Group of the Psychology of Mathematics Education), creado durante el ICME 3 (Karlsruhe' 1976). Este grupo ha sostenido una tesis planteada por H. Bauersfeld y H. Skowronek, referida a problemáticas de carácter teórico como la anterior. Ellos plantean que "no se deben comenzar las investigaciones en Matemática Educativa desde una teoría general y neutral respecto al contenido, y derivar de ella una teoría específica para el

[119] Castorina, J. A. et al. (1996) *Piaget–Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Paidós.
[120] Socas, M. (2002) Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática. *Relime*, 5 (2), p. 212.
[121] Ídem.

caso de la Matemática, sino por el contrario se deberá comenzar por el estudio de los procesos específicos de cada contenido”.[122]

Ninguna de las dos grandes teorías cognitivas del siglo XX agota la riqueza de la Psicología del Aprendizaje, tampoco es conveniente integrarlas mecánicamente pues esto llevaría al eclecticismo. Si bien es cierto que no son complementarias salta a la vista la necesidad de explicar los fenómenos que les son ajenos a ambas de dos formas posibles: extendiendo alguna de estas teorías o buscando una tercera que sirva de fundamento. En este trabajo se es consecuente con el primer camino, pues la extensión del concepto ZDP amplía considerablemente los horizontes del enfoque histórico–cultural de Vigotsky. Así, es completamente posible explicar las dos últimas situaciones planteadas por Socas, tomando en consideración la tercera interpretación del concepto ZDP.

§ 3.2 Sobre los conceptos de ejercicio y problema

En el ámbito escolar los términos “ejercicio” y “problema” son empleados con singular frecuencia. Muchas veces este uso no va acompañado de una precisión clara, como observaron J. del Río y sus colaboradores durante un análisis de los objetivos curriculares de la enseñanza de la Matemática en Iberoamérica[123]. A pesar de esto, hoy día el concepto de “problema” ha sido tratado con suma profundidad en la literatura pedagógica y psicológica.

Es muy difícil iniciar un análisis de los conceptos anteriores sin hacer primero alusión a la “tarea docente”, que constituye la célula del proceso docente–educativo, pues “en ella se presentan todos los componentes y las leyes del proceso y, además, cumple la condición de que no se puede descomponer en subsistemas de orden menor, pues al hacerlo se pierde su esencia: la naturaleza social de la formación de las nuevas generaciones que subyace en las leyes de la pedagogía”.[124] Según varios autores, la tarea docente es un medio del proceso docente–educativo; y se caracteriza por interaccionar con todos los componentes de dicho proceso, por la variedad de enfoques que puede adoptar, y por estar dirigida esencialmente a la formación multilateral de la personalidad.

Los componentes esenciales de la tarea son el objetivo, el contenido y las condiciones. El primero es la representación anticipada de aquel resultado que habrá de ser alcanzado; y se proyecta, de acuerdo con el grado de trascendencia en la transformación que se aspira a lograr en el estudiante, en tres dimensiones: instructiva, desarrolladora y educativa. El segundo engloba los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etcétera), y el objeto de las acciones

[122] Bauersfeld, H. & Skowronek, H. (1976) Research related to the mathematical learning process. In H. Athen & H. Kunle (Eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*. Universität Karlsruhe, ZDM.

[123] Río, J. del; Hernández, L. Y. y Rodríguez, M. J. (1992) *Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica*. Madrid: Mare Nostrum Ediciones Didácticas, S. A., p. 75 y 166.

[124] Álvarez, C. M. (1999) *La escuela en la vida. Didáctica*. La Habana: Pueblo y Educación, p. 115.

(conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos, medios heurísticos, etcétera).

Las terceras, desde el punto de vista cuantitativo, abarcan la frecuencia y la periodicidad de las acciones y operaciones que requiere la tarea, no solo de manera puntual sino también bajo la óptica del sistema de tareas. Desde el punto de vista cualitativo se pone de manifiesto el nivel de complejidad de la ejecución de las acciones y operaciones, así como la flexibilidad expresada en el grado de variabilidad del contenido y del contexto de la propia actividad. El componente cualitativo de las condiciones también comprende la disposición del sujeto, su estado afectivo hacia la tarea, así como el modo en que esta tarea potencia la movilización de sus recursos volitivos (puede resultar gradualmente agradable o no, interesante o no, novedosa o no, etcétera).

Es necesario señalar que en la tarea docente el objetivo se personifica, por cuanto cada estudiante puede seleccionar tareas distintas, a fin de cumplimentar un mismo objetivo; o bien, ante una tarea difícil, escoger otra más sencilla cuya resolución le permita retornar y resolver la inicial mejor preparado. Como ejemplo de tarea docente figura el ejercicio, en el cual se plantea una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera. El trabajo con ejercicios no sólo constituye el medio fundamental para la realización de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, sino también el instrumento adecuado para la medición del rendimiento de los estudiantes. El éxito de la enseñanza de la Matemática no solo depende de cuáles ejercicios se plantean, sino también de cómo el profesor dirige su proceso de resolución.

Existen muchas clasificaciones de ejercicios matemáticos. Una de ellas fue propuesta por R. Borasi[125], la cual denomina sencillamente por “ejercicios” a aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo. Si se trata de un texto formulado con precisión, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, entonces la tarea se denomina “problema con texto”. Cuando el contexto descubre el potencial recreativo de la Matemática, obligando al sujeto resolvente a ser flexible y considerar varias perspectivas, la tarea se denomina “problema puzzle”. En este último caso la formulación puede resultar engañosa, y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos.

Otra tarea que considera esta autora es la “prueba de conjeturas” refiriéndose, por ejemplo, a la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática. También habla de “problemas de la vida real” que suponen tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar la validez de la solución. Borasi también destaca las “situaciones problémicas”, en las cuales el sujeto se enfrenta ante un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. En las situaciones problémicas la formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se tratan de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales.

---

[125] Borasi, R. (1986) On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, 17, pp. 125–141.

Por último, Borasi considera aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno, a estas últimas las denomina “situaciones”. He aquí un ejemplo de situación: *Considérense algunas triplas pitagóricas: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17); … ¿Cumplen alguna regularidad?* Esta interrogante puede suscitar varias conjeturas, tales como: “en cualquier trío existe un múltiplo de 3 y otro de 5”, “existe exactamente un número par”, “existe al menos un número primo”, etcétera.[126]

Como puede apreciarse, la clasificación aducida por Borasi no solo es interesante, sino que también cubre una amalgama de ejercicios matemáticos. Sin embargo, es necesario realizar algunas observaciones. En primer lugar, no se esclarece la base para la división del concepto, aun cuando se conoce que en estos casos suele ser poco precisa. Así, por ejemplo, es posible encontrar un sinnúmero de “problemas con texto” cuyo propósito fundamental consiste en desarrollar algún tipo de algoritmo, o bien cuya formulación es difícil de interpretar a causa de la complejidad semántica. También estos mismos problemas pueden constituir “puzzles” o bien estar referidos a “la vida real”, en virtud de su nivel de contextualización. En segundo lugar, no queda clara la diferencia entre ejercicios y problemas; tal parece que los más abundantes en la enseñanza de la Matemática son los segundos y ciertamente esto no es así. No es posible negar el valor de los ejercicios destinados a estimular la identificación y fijación de los conceptos, ni tampoco los que facilitan el desarrollo de ciertas habilidades.

Clasificaciones similares (aunque es preferible utilizar aquí el término tipología) pueden encontrarse a menudo en la literatura. En la mayoría de los casos deben realizarse señalamientos similares a los anteriores. Particularmente, en muchas obras occidentales de la década de los 80, ocurría con frecuencia el tratamiento indistinto de los términos ejercicio y problema.[127] Es necesario destacar que tal distinción entre ambos conceptos no es obra de una simple diferenciación entre dos palabras. Fue el consenso de la comunidad científica, expresado en las publicaciones periódicas de los últimos años, el que ha llevado a reconceptuar los mismos, tal y como se verá más adelante.

También durante la década antes mencionada, los pedagogos de la extinta República Democrática Alemana seguían derroteros algo distintos. Por ejemplo, W. Jungk elaboró una clasificación de los ejercicios tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones, así como el tipo de reflejo que se realiza.[128] Como superconcepto, este autor eligió el concepto ejercicios

[126] La primera proposición es verdadera, la segunda subsiste sólo en el caso de ternas primitivas, y la tercera queda descartada al considerar otros casos más. Véase Sierpinski, W. (1964) *Elementary Theory of Numbers*, Warsaw: Polska Academic Nauk.

[127] Cf., por ejemplo, Butts, T. (1980) Posing problems property. *NCTM 1980 Yearbook* (ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de investigación abiertos, y situaciones de problemas) y Charles, R. & Lester, F. (1982) *Teaching problem solving. What, Why, How*. Palo Alto, Dale Seymour Publisher (ejercicios de repetición, problemas de traducción simple, problemas de traducción compleja, problemas de procesos, problemas aplicados, y problemas de puzzles).

[128] Jungk, W. (1981) *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2* (segunda parte). La Habana: Editorial de Libros para la Educación. Cf. Zillmer, W. (1981) *Complementos de metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial de Libros para la Educación.

matemáticos planteados a los alumnos; a este lo subdivide en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos; o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otras).

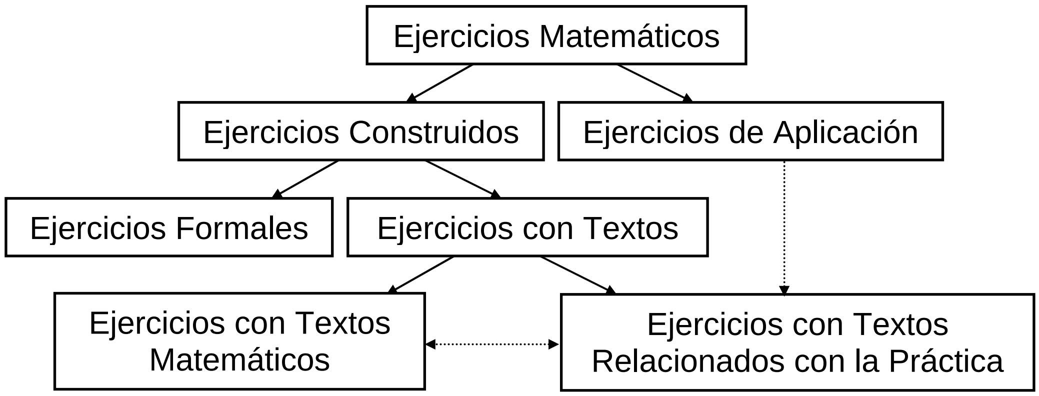

Figura 7. *Tipología de los ejercicios matemáticos, según Jungk*

Los ejercicios construidos sufren a su vez otra división. Por una parte aparecen los ejercicios formales, cuya principal singularidad consiste en que el estudiante identifica rápidamente de qué se trata (la "formalidad" se refiere al formalismo matemático, o sea: una ecuación, un sistema, una identidad, etcétera). Por otro lado aparecen los ejercicios con textos, conformados por aquellos cuyo texto es puramente matemático o bien se relaciona con la práctica.

Con relación a su clasificación, el propio Jungk señala que las fronteras existentes entre los distintos grupos son movibles. Por ejemplo, tanto en los ejercicios con textos relacionados con la práctica, como en los de aplicación, el ejercicio matemático no desempeña el papel de primer lugar. Por su parte, los ejercicios con textos matemáticos y los de textos relacionados con la práctica no son conceptos completamente disjuntos, sino que también se solapan pues los primeros suelen ser "formas preliminares" de los segundos; además, en ambos casos debe analizarse inicialmente el texto para hallar el modelo matemático. En la figura 7 las líneas discontinuas sirven para ejemplificar el eventual solapamiento entre algunos elementos de esta tipología.

También es posible clasificar los ejercicios matemáticos atendiendo a la intención didáctica definida en el objetivo. Así resultan los ejercicios para la introducción, la fijación (ejercitación, repaso, sistematización), la aplicación, etcétera. Sin embargo, la clasificación más sencilla se consigue tomando su estructuración lógica como base para la división del concepto. De esta manera resultan dos tipos de ejercicios: los de determinación, encabezados tradicionalmente por las órdenes "calcula", "resuelve", "efectúa", …; y los de decisión, encabezados por "demuestra que", "refuta", "analiza si es verdadero o falso", entre otros. En lo adelante se hará uso de esta clasificación, no solo por su sencillez, sino también por el amplio espectro de ejercicios que comprende dentro de la escuela cubana. No obstante, cuando sea necesario se utilizará también la clasificación de Jungk, especialmente para referirse a los ejercicios con texto.

Partiendo del concepto de ejercicio, es posible caracterizar qué se entiende por problemas matemáticos en el contexto escolar. Algunos autores conceptúan los problemas en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etcétera. Es notable que ya Descartes, en la regla XII de sus *Regulae ad directionem Ingenii*, afirmaba: “Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea perfectamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1°, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2°, ese algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3°, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido”.[129]

Existen diferencias sustanciales entre la concepción de “problema” sostenida desde distintos ámbitos del saber humano. Desde la Matemática, por ejemplo, puede tomarse en consideración las opinión del formalista Hilbert: “Mientras mayor sea la existencia de problemas en una rama de la ciencia, esta será más actual; la carencia de problemas simboliza la extinción o el cese del desarrollo independiente. Así como cada empresa humana persigue ciertos objetos, igualmente la investigación matemática requiere de sus propios problemas. Es precisamente mediante la solución de problemas que el investigador prueba el temple de su acero, encuentra nuevos métodos y nuevos ángulos, y su horizonte se amplia y se libera”.[130] Estas palabras de Hilbert caracterizan un problema implícitamente, pero con evidente claridad. Obviamente la posesión del problema es individual. Se trata del problema de un matemático, el cual quizás lo resuelva o trate de hacerlo; pero una vez que el problema ha sido planteado, este se convierte en un problema para toda la comunidad de matemáticos, o sea, se convierte en un “problema de Matemática”.

Desde la perspectiva cuasi–empirista los defensores de la Etnomatemática asumen una concepción de problema que emerge de dicha epistemología. Según Borba, un problema es aquello que resulta interesante, que se manifiesta como un obstáculo, o que preocupa en general. Para ella este concepto tiene dos aspectos esenciales: uno subjetivo y otro objetivo. El aspecto subjetivo implica conciencia de una necesidad de dar solución o respuesta, y el aspecto objetivo está constituido por una situación de rompecabezas, o partes a encajar, que pone a prueba la conciencia. Los aspectos objetivo y subjetivo de esta definición de problema están condicionados por la tradición cultural de una persona, dado que tanto el aspecto de interés como el de lo que es un obstáculo dependen de la cultura de una persona.

[129] El término “dialécticos” sustituye a los representantes de la silogística aristotélica, los cuales esgrimían el arte de discutir como arma de argumentos (Descartes, Ibíd.).
[130] Hilbert, D. (1902) Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, pp. 437–479.

“Un problema puede considerarse como una situación que requiere una parada en el curso de la vida de una persona y que es importante para la existencia de esa persona”.[131]

Aquí se ha puesto de manifiesto un concepto “vital” de problema. Cuando un problema, en su planteamiento, tiene un tratamiento matemático, o en su solución aparecen características matematizables, puede que generen Matemática aquellas personas que han sido retadas por la situación problemática. Es por lo tanto parte de la vida y la cultura de una persona la RP, con intervención de la Matemática ayudando a modelarlo y/o a resolverlo. Así pues, la Etnomatemática toma la RP como un objeto clave en su cometido, pero partiendo de situaciones problemáticas “vivas” y empleando conocimiento surgido en el “diálogo” social contemporáneo con el problema, para modelar y resolver problemas contextualmente, no generalmente.

Por otra parte, desde el ámbito de la Psicología, es interesante la siguiente observación hecha por K. Duncker: “Un problema emerge a partir de que una criatura viva posee una meta, más desconoce como puede alcanzarla”.[132] La idea de Duncker es muy similar a la de muchos otros psicólogos, los cuales consideran explícitamente la psiquis humana y no precisamente la de una “criatura viviente”. En esta caracterización se resalta que un problema es un producto de la mente humana (una tarea en sí misma no alcanza tal dimensión, sino cuando es vivida como tal). También es notable el énfasis hecho sobre dos condiciones fundamentales, las cuales están centradas en el resolutor; éstas son: una meta que sirve de móvil para estimular al sujeto y el hecho de que su objetivo no puede lograrse a través de procedimientos automáticos.

Como puede apreciarse, estos dos puntos de vista aparentan cierta rigidez. El primero se centra en la disciplina, mientras que la segunda lo hace en la psiquis del sujeto. Sin dudas no es fácil mediar entre los dos extremos, pero esto es precisamente lo que hay que hacer cuando el problema se inserta en el ámbito docente–educativo. Para que la DM asuma una concepción propia de problema podría parecer adecuado “importar” una de estas posiciones, o al menos elaborar una posición conciliadora. Sin embargo, no se trata de buscar una caracterización tomando como criterios los saberes de ciencias que tienen por demás otros objetos de estudio. La DM como didáctica particular y, más aun, como parte de las Ciencias Pedagógicas, debe conceptuar su propia posición. Este hecho constituye un reto al cual no se le han dedicado suficientes estudios. Realmente la mayoría de las investigaciones asumen una posición cercana a la psicológica, lo cual es bastante razonable si se tiene en cuenta que la formación de este concepto ha ocurrido en una rama bastante cercana a la Didáctica, como es el caso de la Psicología del Aprendizaje.

En este libro se asume una posición intermedia, donde el foco de atención es el estudiante. El problema en DM no solo potencia el desarrollo cognitivo, sino también el establecimiento de un vínculo afectivo y motivacional por la Matemática, así como la formación integral del estudiante. Esta concepción es más plausible. Polya, un

[131] Borba, Ibíd., p. 40.
[132] Duncker, K. (1945) On problem solving. *Psychological monographs*, 58, p. 1 (5, whole number 270).

arquetipo de pedagogo de la Matemática (aunque matemático también), señaló: "[…] un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello".[133] Las observaciones de Polya son el resultado de una correcta mediación. Son tomados en cuenta el desarrollo cognoscitivo y la motivación del estudiante, así como la necesidad de balancear las dificultades en la adquisición de los conocimientos y las habilidades.

Es conveniente precisar que el problema matemático no debe ir orientado hacia el nivel actual de desarrollo del escolar, sino hacia la ZDP. La situación inicial del problema (lo dado) debe estar concebida para el nivel actual, pero la situación final (lo buscado), junto con el proceso de resolución (que es desconocido por naturaleza), debe generar desarrollo. En la propia actividad de formulación de problemas se pone de manifiesto que la relación asimétrica novato–experto puede tener dos interpretaciones fundamentales: el alumno guiado por otros (el maestro, sus compañeros más aventajados, …) y el alumno guiado por sí mismo. Es por ello que se deben considerar dos aspectos esenciales: uno subjetivo, asociado a una necesidad que alguien experimenta y que no ha podido satisfacer; y otro objetivo, asociado a un objeto cuya situación actual no posibilita aprovecharlo para satisfacer dicha necesidad.

Resumiendo: un problema es aquella situación que se caracteriza por la existencia de una persona (o grupo) que desea resolverla, de un estado inicial y otro final, y de algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro. Esto permite comprender que en el ámbito escolar un ejercicio (o en general cualquier tarea docente) será problema si el paso del estado inicial al estado final implica que el estudiante experimente un desarrollo cognitivo, al trabajar sobre su ZDP.

Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro (carácter relativo). Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo. No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Aun cuando el sujeto resolvente no disponga de la idea de solución, se entenderá que si se encuentra enfrascado en hallar una respuesta, se encuentra resolviendo el problema.

Como se ha podido apreciar, el principal atributo que distingue el problema del resto de las tareas docentes, estriba en el desconocimiento de un procedimiento de resolución por parte del sujeto. El problema es una cualidad que potencialmente puede adquirir la tarea; así que una tarea puede o no ser problema. Aquellas que no lo sean serán denominadas "rutinarias", siguiendo a Polya. Por ejemplo, es posible

[133] Polya, Ibíd., 1957, p. 5.

hablar de ejercicios rutinarios con texto o de problemas con textos.[134] Además, al demostrar una equivalencia, subsiste la posibilidad de que se enfrente un problema formal en un sentido y un ejercicio rutinario formal en el otro.

Existen muchas clasificaciones de problemas que responden a diferentes criterios. Por ejemplo, basándose en una idea de Pappus, Polya habla de "problemas por resolver" y "problemas por demostrar". Partiendo de los conceptos anteriores, puede verse que esto no introduce una idea nueva, si se consideran primero los "ejercicios de resolución" y los "ejercicios de demostración" (donde el criterio se enmarca en la habilidad predominante), para luego analizar si son o no problemas. De la misma manera no se lograría una clasificación favorable si se toma como criterio el campo del saber matemático al cual pertenece el problema (problemas de razonamiento lógico, de geometría, de aritmética, etcétera).

La concepción asumida presupone que los criterios de clasificación vallan dirigidos hacia la representación mental que el sujeto se hace de la información brindada por la tarea, especialmente en lo que se refiere a las situaciones inicial y final. Es por ello que actualmente la escisión más aceptada en el ámbito científico es la de cerrados y abiertos. Los problemas cerrados se caracterizan por expresar lo dado y lo buscado con suficiente exactitud. En general, la mayoría de los problemas propuestos en los textos escolares presentan dicha estructura, tal es el caso del siguiente ejemplo:

> *Se tienen cuatro cartas, tales que cada una de ellas tiene una letra en una de sus caras y un número en la otra. Las cartas han sido dispuestas encima de la mesa, de manera que aparecen visibles, respectivamente, la E, la K, el 4 y el 7. Indicar aquellas cartas, y solamente aquellas, que es necesario dar vuelta para comprobar si es verdadera o falsa la siguiente regla:* "*Si una carta tiene en una cara una letra vocal, entonces tiene en la otra un número par*".[135]

La resolución de este problema exige simplemente un razonamiento basado en la Lógica Formal, por cuanto basta verificar la implicación aducida como su contrarrecíproco. Luego, se trata de un caso distintivo de problema cerrado.

Por el contrario, en los problemas abiertos la situación inicial y/o la meta a alcanzar no se precisan con suficiente claridad. Por este motivo, tales problemas son susceptibles de diferentes interpretaciones o diferentes respuestas aceptables. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Por este motivo, suelen denominarse "problemas sin los datos necesarios". Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia.

---

[134] No en el sentido de Borasi, sino en el de Jungk; véase Ibíd.

[135] Ligeras modificaciones de un problema propuesto por Collins, A. M. & Quillian, M. R. (1969) Retrieval time from semantic memory. *Journal of verbal learning and verbal behavior*, 8, pp. 240–247.

Campistrous y Rizo, aportan un ejemplo muy sencillo del ámbito escolar: *Se quiere construir un tanque de agua con una capacidad de 8000 L. ¿Qué dimensiones debe tener?* Evidentemente existen condiciones que no están dadas, como la forma del tanque que puede ser ortoédrica, cilíndrica, etcétera; y la cantidad de material disponible, pues se gasta más o menos, en dependencia de la forma y dimensiones escogidas.[136]

E. Silver considera razonable enmarcar, dentro del conjunto de los problemas abiertos, aquellos que "invitan" a desarrollar diferentes métodos de solución, o bien aquellos cuya resolución "sugiere" otros problemas o generalizaciones. Esto es permisible, pero es esencial que la tarea promueva el objetivo de realizar tales acciones. Este señalamiento refuerza la concepción de problema que se ha asumido, pues la naturaleza de "abierto" o "cerrado" debe enfocarse desde la perspectiva del estudiante. Además, cómo estar seguro de que un problema realmente "invita" a desarrollar diferentes métodos de solución. Silver propone como ejemplo el siguiente problema muy conocido: *En el corral hay algunos pollos y algunos conejos. Se cuentan 50 cabezas y 120 patas. ¿Cuántos animales de cada tipo hay en el corral?* A continuación alega: "En este episodio los estudiantes exponen y discuten la validez, generalización y potencia de dos enfoques algebraicos, una solución visual y el uso de aproximaciones sucesivas".[137]

En un pequeño experimento se decidió proponer este mismo problema a 38 estudiantes del segundo año de la Licenciatura en Matemática–Computación (ISP "José de la Luz y Caballero" de Holguín) en el curso escolar 1998–1999, justo cuando estudiaban la resolución de ecuaciones diofánticas lineales. Después de revisar los resultados, fue posible comprobar que 35 intentaron resolverlo (con éxito o no) aplicando el contenido que entonces era objeto de estudio. Esto revela el grado de subjetividad que encierra tal clasificación. En este caso, el nivel de familiarización con problemas análogos, junto al "contrato didáctico", podrían ser los responsables de "no invitar" a desarrollar diferentes vías de solución.

Por otra parte, la propia naturaleza matemática del problema presupone infinitas vías de solución, así como infinitas generalizaciones y conexiones con nuevos problemas. De todas formas, el problema puede exigir el análisis de varias vías de solución. Así, un problema abierto puede ser: *Demostrar de tres formas diferentes el teorema de Pitágoras.*

Otro tema que ha despertado gran interés en la comunidad científica lo constituye, a su vez, la clasificación de los propios problemas abiertos. En efecto, por lo menos una entre las situaciones inicial y final debe ser abierta, lo cual genera tres variantes posibles. E. Pehkonen propone un gráfico (véase la figura 8), donde clasifica ciertos casos muy usuales de problemas abiertos.[138]

[136] Campistrous, L. y Rizo, C. (1996) *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Pueblo y Educación, pp. 92–93.
[137] Silver, E. A. (1995) The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM*, Vol. 2, p. 68.
[138] Pehkonen, E. (1995) Using open–ended problems in mathematics. *ZDM*, 27 (2), p. 56.

		SITUACIÓN FINAL	
		Lo buscado es CERRADO	*Lo buscado es ABIERTO*
SITUACIÓN INICIAL	*Lo dado es CERRADO*	Problemas cerrados	Problemas de fin abierto Situaciones de la vida real Investigaciones Campos de problemas Variaciones de problemas
	Lo dado es ABIERTO	Situaciones de la vida real Variaciones de problemas	Situaciones de la vida real Variaciones de problemas Proyectos Planteo de problemas

Figura 8. Una c*lasificación de los problemas según Pehkonen*

§ 3.3 Bases psicológicas de la resolución de problemas

Partiendo de los argumentos expuestos en los dos epígrafes anteriores, queda claro que el análisis de la RP no es patrimonio exclusivo de la Psicología. No obstante, es justo reconocer el papel extraordinario que juega esta ciencia en los presupuestos teóricos de la RP. Este proceso moviliza un conglomerado de recursos cognitivos, destacándose la activación de múltiples operaciones mentales. Como resultado de esta compleja actividad humana, resultan soluciones de extraordinaria coherencia lógica. Algunas de ellas son verdaderamente sorprendentes y suelen catalogarse de creativas. La explicación más plausible para tal fenómeno tiene su basamento en la Psicología Cognitiva.

§§ 3.3.1 La cognición y el proceso del pensamiento

Para poder comprender de manera plena y cabal la esencia de la formación y desarrollo de las habilidades, es necesario deslindar el lugar que ocupan en la psiquis del hombre. En términos generales, la cognición alude al conjunto de actividades a través de las cuales la información es procesada por el sistema psíquico. Se acepta así que el término cognición comprende toda una serie de procesos mentales que realizan los seres humanos para adquirir, retener, interpretar, comprender, organizar y utilizar tanto la información existente en el medio que les rodea, como la propia información ya adquirida y almacenada. De este modo, la cognición incluye los procesos de percepción, atención, imaginación, intuición, lenguaje, memoria, creatividad, pensamiento, inteligencia y RP. Pero no sólo los procesos cognitivos sirven para procesar la información, sino también para construir representaciones de la realidad y para crear conocimiento. Este término se refiere tanto al sistema de procesamiento de la información, como al contenido procesado y al resultado del proceso, es decir, al conocimiento.[139]

El estudio de la cognición es tan amplio que resulta imposible abordar siquiera su relación con el subproceso de RP. Un ejemplo emblemático de las discusiones actuales en materia de cognición (específicamente en cuanto a deducción se refiere) puede encontrarse en *Behavioral and Brain Sciences*. En esta revista aparecen propuestas de avanzada en los campos de la Psicología, Neurociencia, Ciencias Cognitivas, y "Biología de la Conducta"; cada una acompañada por un conjunto de comentarios y réplicas de especialistas seleccionados, así como la respectiva contrarréplica de los autores de tales propuestas.

En una controvertida investigación, titulada *Précis of Deduction*, P. N. Johnson–Laird y R. M. J. Byrne, discuten el origen de las deducciones humanas.[140] Critican la versión cibernética que enfatiza las reglas formales de inferencia lógica para enfocar la deducción, mostrando que este es el resultado de un proceso psicológico muy complejo. Por este motivo, asumen el enfoque de la teoría de los "Modelos Mentales", la cual plantea que las personas razonan para comprender una situación y que el punto de partida es un conjunto de modelos construidos a partir de la realidad objetiva (incluyendo el propio conocimiento que genera razonamiento). Los modelos mentales pueden ocurrir como imágenes visuales; incluso pueden ser inconscientes. Un hecho relevante reside en la tesis de que la racionalidad es relativa a la cultura.

En la mencionada obra se crea una controversia respecto a la idea general de racionalidad. Los autores arguyen que "la teoría de los modelos provee un camino para resolver la controversia. Esta es el corazón central de la racionalidad, la cual aparenta ser común a todas las sociedades humanas. Este es el principio semántico de validez: un argumento es válido solo si este no es el camino cuyas premisas pudieron ser verdaderas y su conclusión falsa. Un corolario del principio consiste en que ciertas *formas* de los argumentos son válidas, y estas formas pueden ser especificadas por reglas formales de inferencia. Es un error craso, sin embargo, suponer que estas reglas son per se criterios universales. Estos fundamentos proporcionan un relativismo atractivo pues los errores sistemáticos son difíciles de explicar, a menos que uno abandone la racionalidad a favor de reglas de inferencia alternativas e ilícitas".[141]

Un componente esencial de la cognición es la memoria, la cual además juega un papel muy importante en la resolución de problemas matemáticos. Frecuentemente, su consideración pasa desapercibida en los estudios de algunos autores. Aunque los currículos escolares promulgan el saber y el saber hacer, desafortunadamente los objetivos aparecen definidos en términos de habilidades, imponiendo al conocimiento un carácter fortuito. La memoria puede ser de corto o largo plazo. Ciertos estudios concluyen que, en un término breve de tiempo, se logra recordar un

[139] Véase Martín, A. V. (1999) Más allá de Piaget: cognición adulta y educación. *Teoría de la Educación*, 11, pp. 127–157.
[140] *Op. cit.*, 16 (2), 1993.
[141] Ibíd., p. 332.

conjunto de aproximadamente siete elementos o *chunks*.[142] La fijación de los conocimientos se asocia a un estudio sistemático de la Matemática. Esto último, en ocasiones, tampoco se tiene en cuenta y se desaprovecha la posibilidad de traer a colación un teorema estudiado en la secundaria, durante la resolución de un problema en el preuniversitario. También pueden memorizarse algunos hechos matemáticos cuando su aprendizaje resulta significativo, vivencial o contextualizado.

La memoria también puede ser clasificada en visual o abstracta. La primera es común en la infancia y se expresa, por ejemplo, cuando los niños miran hacia arriba "buscando" en su imaginación la resolución de un problema. Los ajedrecistas gozan de una excelente memoria visual e imaginan el tablero con todas sus piezas, de manera que son capaces de jugar "a ciegas" con gran efectividad. Es lamentable que la sociedad en general y la escuela en particular, lejos de fortalecer esta memoria, actúen en detrimento de ella. En efecto, la enseñanza enfatiza la memoria abstracta, la cual se basa en el establecimiento de relaciones recordables. Por ejemplo, en Cuba es difícil recordar el número de identidad de otra forma que no sea asociando los dígitos que lo forman (de 11 en total), en números de dos y tres cifras. La figura 9 representa un modelo propuesto por Silver, donde se expresa la compleja relación entre la memoria humana y el proceso de RP.[143]

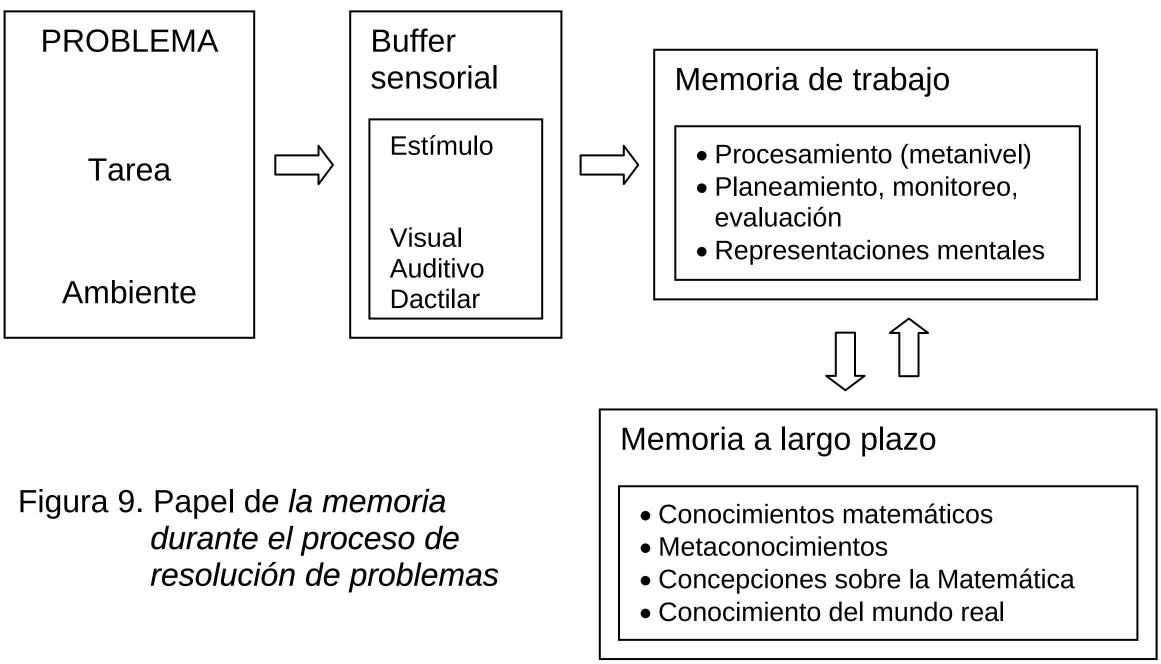

Figura 9. Papel de *la memoria durante el proceso de resolución de problemas*

Como puede observarse, la memoria de trabajo es más dinámica que la memoria a largo plazo, pero a la vez más inestable. La actividad de pensamiento requiere la

[142] Véase Schoenfeld, Ibíd., 1992.

[143] Silver, E. A. (1987) Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33–60). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

actualización de conocimientos ya adquiridos. Estos emergen sobre la base del establecimiento de un grupo de condiciones, como el reconocimiento de las premisas de un teorema, la aparición de ciertos indicios que propician una analogía, etcétera. La interacción entre estos tipos de memoria fortalece el proceso de RP, pero a su vez contribuye a fijar los conocimientos almacenados en la memoria, así como al establecimiento de nuevos recursos para que estos últimos emerjan sistemáticamente.

Por otra parte, en lo que a pensamiento se refiere, muchos autores han conceptuado diversos tipos de pensamiento (lógico, creativo, matemático, geométrico, etcétera). Esto no está mal si se parte de que son configuraciones adoptadas por el pensamiento humano como forma general de pensamiento. Este último no puede operar de manera pura con conceptos matemáticos, al margen de los que no lo son, sino en estrecha interrelación. Vigotsky apuntaba: "Creemos que tanto el desarrollo de la actividad espontánea como el de la no espontánea [se refiere a la actividad que opera con conocimientos científicos], se relacionan y se influyen mutuamente. Son parte de un proceso único, el de la evolución de la formación del concepto, que se encuentra afectado por las variaciones externas y las condiciones internas, pero que es *esencialmente unitario*, y no un conflicto de formas de ideas antagónicas, mutuamente excluyentes".[144]

Desde el punto de vista lógico, el pensamiento opera con conceptos, juicios y razonamientos. Estas son sus formas lógicas que permiten un estudio del mismo a posteriori. Sin embargo, esto no es tan simple. Rubinstein señala que "[e]n la fórmula del silogismo se ha buscado el esquema del proceso mental, del proceso de cognición, y al no hallar dicho proceso en el silogismo, ha habido quien se ha sentido decepcionado. Mas la culpa no radica en el silogismo, sino en el hecho de habérsele pedido, erróneamente, lo que no corresponde pedir".[145]

El estudio del proceso del pensamiento sienta su base en la concepción dialéctico–materialista del determinismo, la cual expresa que las causas externas actúan de manera mediata a través de las condiciones internas.[146] A menudo se define el pensamiento como un proceso a través del cual se resuelve un problema. En efecto, por lo común el pensamiento emerge ante una situación problémica con vistas a la solución de la misma. No obstante, señala Rubinstein, "reducir el pensar a un proceso de solución de problemas, significa definirlo desde un punto de vista pragmático en virtud del efecto a que da lugar sin poner de manifiesto su naturaleza intrínseca, o sea, aquello gracias a lo cual se obtiene el efecto aludido".[147] Más adelante él esclarece todavía más esta idea cuando expresa: "La definición de pensamiento como un proceso carecería de contenido si no concretáramos en qué

---

[144] Vigotsky, L. S. (1934/1982) *Pensamiento y lenguaje* (p. 88). La Habana: Pueblo y Educación (sin itálicas).

[145] Rubinstein, S. L. (1966) *El proceso del pensamiento* (p. 165). La Habana: Editora Universitaria.

[146] A menudo el principio del determinismo se asocia a la idea mecanicista predominante en la ciencia de los siglos XVII–XVIII. Aunque sólo aparentemente y con cierta aproximación pudo ser aplicada por la mecánica clásica al movimiento mecánico de un punto, resultó, sin embargo, que no siempre puede aplicarse en la mecánica cuántica. En el ámbito pedagógico, una interpretación incorrecta del determinismo deviene conductismo.

[147] Ibíd., p. 23.

consiste dicho proceso. El proceso del pensar es, ante todo, un *análisis* y una *síntesis* de lo que este nos proporciona; es, además, una *abstracción* y una *generalización*, derivadas de aquellos. Las leyes que regulan estos procesos en el marco de sus interinfluencias, constituyen *las leyes internas básicas del pensar* […]".[148]

De todas formas, este mismo autor señala en otra de sus obras: "Todo proceso mental es, por su estructura, un acto que está orientado hacia la solución de una determinada *tarea* o un determinado *problema*. Este problema asigna una *finalidad* a la actividad mental del individuo, la cual está vinculada con las condiciones del planteamiento del problema. Todo acto mental real del sujeto deriva de cualquier motivo. El factor inicial del proceso mental es, por regla general, la *situación problemática*. El hombre empieza a pensar cuando siente la necesidad de comprender algo. El pensar empieza normalmente con un problema o con una cuestión, con un asombro o con una confusión, con una contradicción. Toda esta situación problemática conduce a que se inicie un proceso mental. Y este siempre está orientado a la solución de cualquier problema".[149]

De esta manera, por el papel predominante que juegan los problemas, Rubinstein no logra apartarse de una génesis problemática para el pensamiento. Aunque así, como él mismo señalaba anteriormente, se corre el peligro de reducirlo a la simple RP. Particularmente, ya en el § 3.1, cuando se hizo alusión a la cita de Gowers (véase p. 61), salió a colación la irreductibilidad del pensamiento matemático a esta actividad. Un ejemplo que, aparentemente, nada tiene que ver (a priori) con la RP, y que implica una actividad de pensamiento, es la formulación de problemas. Sin embargo, esto no es absolutamente así, tal y como se explicará en el capítulo 5.

Para concluir, queda claro que el pensamiento es un proceso cognitivo, dirigido hacia el conocimiento de la realidad objetiva; que su contenido se expresa por subprocesos más simples (análisis, síntesis, abstracción y generalización), los cuales se combinan de forma altamente compleja. De esta manera, el estudio de la forma en que se expresa el pensamiento es todavía más complejo que la determinación de su contenido. Resolver problemas exige de pensamiento y el propósito del capítulo 4 es desmembrar, precisamente, la esencia de esa ese pensamiento.

El análisis y la síntesis no son exclusivos del pensamiento, sino de otros subprocesos de la cognición como la sensopercepción. Particularmente, durante la observación que el sujeto realiza de una figura geométrica, el análisis sensorial (en este caso, visual) es muy importante. De esta manera queda claro que el proceso de RP es muy complejo y presupone la intervención de varios subprocesos cognitivos, entre ellos el pensamiento. Las operaciones mentales no dan origen al pensamiento; al contrario, "es este el que las suscita y luego aquellas se incorporan al pensamiento".[150] Así, "cualquier intento encaminado a concebir las operaciones mentales como algo primario y a reducir a su funcionamiento mecánico el proceso

[148] Ibíd., pp. 40–41.
[149] Rubinstein, S. L. (1945/1967): *Principios de psicología general* (pp. 385–386), La Habana: Pueblo y Educación.
[150] Rubinstein, 1966, p. 68.

del pensar, parte de principios falsos y está condenado al fracaso".[151] Esta tesis de Rubinstein no significa que se renuncie al estudio de la formación por etapas de las acciones mentales, pero advierte muy bien del peligro que encierra suponerlas como eslabón primario del pensamiento. Es más, este último no solo las invoca, sino que ellas constituyen formaciones psicológicas relativamente independientes, las cuales se circunscriben más bien al macroproceso de la cognición. Así, es posible hablar de operaciones para memorizar, entre otras. Incluso hablar de operaciones motoras, lo cual escapa del ámbito cognitivo y se enmarca en el plano todavía más amplio de la actividad del sujeto.

§§ 3.3.2 La resolución de problemas como habilidad generalizada

Una exposición sistemática del concepto de actividad se debe a Leóntiev. Este psicólogo convirtió en objeto de la psicología la actividad que relaciona al sujeto con el mundo[152], develando su estructura, y eliminando la posición dualista entre el proceso de la conciencia y la actividad externa; demostrando que no se trata de dos cosas distintas, sino de dos formas de un todo único: de la actividad. Estas dos formas están unidas entre sí mediante transiciones y transformaciones mutuas, lo cual constituye la manifestación principal del principio de la unidad entre psiquis y actividad.

Los objetos externos que dirigen la actividad son el motivo y el objetivo. El motivo de la actividad no se limita a la necesidad del sujeto por algo, sino a una necesidad objetivada, como objeto que mueve el sujeto a la acción. Leóntiev distingue los conceptos de actividad, acción y operación. Para él la actividad comprende los procesos que implican una activa vinculación del sujeto con la realidad. Lo más importante que distingue una actividad de otra es su objeto. El objeto de la actividad es su motivo real (externo o ideal); pero más allá del objeto está la necesidad. La actividad está necesariamente relacionada con el motivo y no puede existir en ausencia de él. "[L]a actividad 'no motivada' no entraña una actividad privada de motivo, sino una actividad con un motivo subjetiva y objetivamente oculto".[153]

Los principales componentes de algunas actividades humanas los constituyen las acciones que realizan. "Denominamos acción [dice Leóntiev] al proceso que se subordina a la representación de aquel resultado que habrá de ser alcanzado, es decir, el proceso subordinado a un objetivo consciente. Del mismo modo que el concepto de motivo se relaciona con el concepto de actividad, así también el concepto de objetivo se relaciona con el concepto de acción".[154] Un rasgo distintivo de la acción, que lo diferencia de la actividad, reside en la no coincidencia del motivo y el objetivo. Por su parte, las operaciones constituyen métodos, por medio de los cuales se realiza la acción; son formas de realización de estas últimas. De este

[151] Ibíd., p. 66.
[152] Véase Leóntiev, A. N. (1947) *Ensayo del desarrollo de la psiquis*, Moscú.
[153] Leóntiev, A. N. (1975/1981) *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación.
[154] Ídem.

modo, las operaciones no corresponden directamente al objetivo de la acción, sino a las condiciones en las cuales está dado dicho objetivo.

Leóntiev también resaltaba que la actividad no puede comprenderse como la simple suma de sus partes, pues no se tata de un proceso aditivo. “Las acciones, propiamente, no son elementos especiales ‘separados’ que son incorporados a la actividad. La actividad humana no puede existir de otra manera que en forma de acciones o grupos de acciones”.[155] Un hecho notable que expresa esta idea con mayor claridad consiste en la dinámica que tiene lugar entre la actividad, la acción y la operación. En efecto, al adquirir una fuerza excitadora propia, la acción se convierte en actividad; sin embargo, al perder su motivo originario, una actividad se convierte en acción.[156] De todas formas, respondiendo al motivo o al objetivo, ambas se manifiestan en el plano consciente.

El tránsito de lo consciente a lo inconsciente también tiene lugar. No se niega la existencia de ambos planos, pero la actividad inconsciente en la RP es tan exigua (o al menos tan poco perceptible), que no constituyen pares dialécticos adecuados para explicar el proceso de RP. Por esto se prefiere hablar de niveles, desde planos más conscientes hasta otros menos conscientes. Este es el caso del tránsito de la acción hasta convertirse en operación, transformándose en un procedimiento para alcanzar cierto objetivo. Este hecho resulta del grado de sistematización, de manera que el objetivo deja de constituirse como representación anticipada del resultado a alcanzar, para abrir paso a las condiciones objetivas y subjetivas que dan lugar a la operación. También el proceso inverso es posible en la medida que las condiciones mencionadas se objetivizan y pasan a un plano más conciente.

Las operaciones se forman de las acciones y viceversa. Cuando el objetivo de una acción forma parte de otra acción como condición de su cumplimiento, la primera acción se transforma en método de realización de la segunda, en una operación. Recíprocamente, la necesidad de adaptar una operación a nuevos contenidos, puede conducir a que esta se manifieste como acción, incluso como actividad. Por ejemplo, la generalización es una operación mental; sin embargo, también es una acción cuando se resuelven ciertos tipos de problemas (por ejemplo, de inducción completa). Es más, la generalización en un sentido amplio, es parte esencial de la actividad matemática más compleja.

En sentido general, el grado de desarrollo de una actividad responde al grado de desarrollo de cierta capacidad. De la misma manera se relaciona la acción con la habilidad y la operación con el hábito. Es posible resumir las correlaciones anteriores a través del esquema de la figura 10.

Las correspondencias entre la segunda y tercera columnas no expresan equivalencias conceptuales. En efecto, la habilidad no se expresa siempre a través de una sola acción, sino que puede expresar el grado de desarrollo de varias acciones y operaciones. Álvarez define habilidad como “una dimensión del contenido que muestra el comportamiento del hombre en una rama del saber propio de la cultura de la humanidad. Es, desde el punto de vista psicológico, el sistema de

[155] Ibíd., p. 84.
[156] Véase Ibíd., p. 89.

acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo”.[157] Es válido preguntarse qué sentido tiene definir una formación psicológica a través de su estructura.

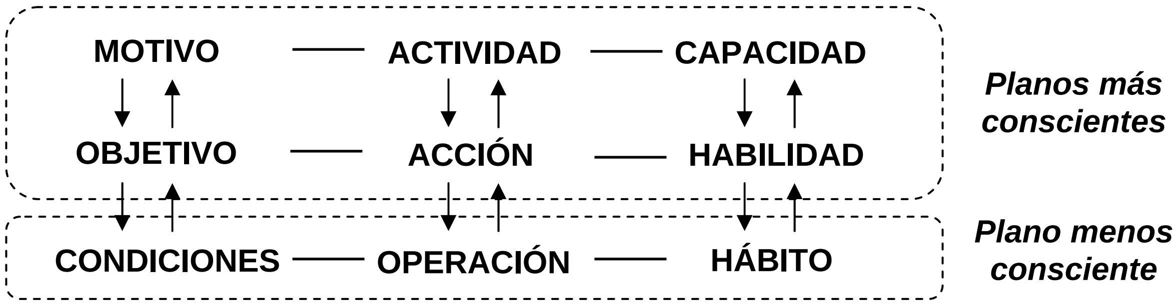

Figura 10. *Formación por etapas de las acciones mentales*

La habilidad debe conceptuarse como una formación psicológica predominantemente cognitiva que expresa el grado de desarrollo de cierto sistema de acciones y operaciones, y que responde a un objetivo consciente. Como puede observarse, no se hace referencia a las manifestaciones de las esferas afectivo–motivacional, lo cual no significa que no estén presentes en completa interacción. Sin embargo, evitar la abstracción distanciaría el propósito de develar la esencia, y convertiría el concepto de habilidad en algo innecesariamente difuso. La caracterización que se ha asumido no se traduce en la simple igualación de la habilidad a la destreza; esta última más bien identifica la rapidez en la instrumentación de los componentes. La habilidad es mucho más, pues su dominio presupone la implementación sistémica de estos componentes cuando emerge el objetivo.

No es posible evaluar la habilidad alcanzada tomando como criterio el tiempo de ejecución exitosa; ni siquiera a partir del resultado final obtenido en el proceso. Tal evaluación incluye estos aspectos, pero va más allá. En efecto, un análisis profundo presupone examinar la forma y el contenido del proceso. El contenido presupone el dominio del conjunto de acciones y operaciones a realizar (qué hacer). Esto se ha denominado “invariante funcional” y consiste en el subsistema de acciones y operaciones esenciales que resultan necesarias y suficientes para el cumplimiento del objetivo. Se parte de la idea de enfocar el invariante como subsistema y no como el conjunto de acciones y operaciones. Esto permitirá, como se verá más adelante, explicar la naturaleza de las habilidades generalizadas. Por otra parte, la forma expresa el dominio de las relaciones entre los componentes del sistema, así como entre estos y otros que se asocian a las habilidades y hábitos. La forma se refiere a cuándo y cómo instrumentar cada acción y operación.

Tampoco es posible evaluar el desarrollo de una habilidad fuera de otras habilidades y hábitos, o sea, fuera de una actividad humana más compleja. Esto explica el

[157] Álvarez, C. M. (1999) *La escuela en la vida* (p. 71). La Habana: Pueblo y Educación.

tránsito de la habilidad por los niveles registrados ampliamente en la literatura: de familiarización, reproductivo, productivo y creativo. En los dos primeros niveles el aprendizaje de la habilidad no se aleja de las fronteras del conjunto de acciones y operaciones esenciales; esto es el invariante funcional. Naturalmente, el sujeto activa otras acciones y operaciones que emergen necesariamente, como resultado de la experiencia que ya posee.

Desde el momento que el sujeto aplica sistemáticamente la habilidad durante ciertas acciones propias de otras actividades, se aproxima al plano productivo. Así, va quedando definida una región que en lo adelante se denominará "Complejo Variacional". Este constructo comprende el conjunto de acciones y operaciones que si bien son externas al invariante funcional, cada vez van siendo asociadas y aplicadas sistemáticamente por el sujeto, durante la realización del objetivo. En la medida que este complejo se agranda, la habilidad se aleja del plano productivo, llegando finalmente al creativo.

Esta idea destierra la versión esquemática de habilidad como nivel de dominio de cierto invariante funcional. El tránsito por los niveles del complejo variacional no ocurre de manera uniforme en sujetos diferentes. Es por ello que se rompe también con la idea de habilidad como singularidad, para asumirla como pluralidad. Esto explica la diversidad de formas de asimilación y de modos (personales) de implementación, durante la RP.

La estructura de la habilidad puede rebasar la acción, incluso el sistema de acciones. Esto se debe a la posibilidad eventual de que su contenido se estructure a partir de un sistema de acciones y operaciones, donde estas últimas no tienen por qué integrar determinada acción. Esto no quiere decir que no pueda hablarse de una habilidad asociada a una acción, por el contrario, este sería el tipo más simple de habilidad. En todos los casos puede distinguirse el invariante con su complejo asociado, determinando una habilidad que responde a un objetivo más sofisticado. Justamente, esta armazón de acciones y operaciones tienen, como caso particular, lo que Talízina ha denominado "procedimiento de la actividad cognoscitiva".[158] Esta idea aparece resumida en la figura 11.

Es necesario aclarar que el concepto de complejo variacional no coincide con el de "nodo cognitivo", el cual ha sido introducido por H. Hernández.[159] Esta investigadora enriqueció el enfoque genético desarrollado por la psicología rusa, donde se trata ampliamente el concepto más elemental de "célula generadora" para explicar el desarrollo y evolución de otros conceptos.[160] Hernández introduce la idea del nodo cognitivo como un punto de acumulación de información en torno a un concepto o a una habilidad determinada. "Es información que se establece de manera consciente

[158] Véase Talízina, Ibíd., Cap. IV, pp. 201–253.

[159] Hernández, H. (1995) *Nodos cognitivos. Un recurso eficiente para el aprendizaje matemático*. Ponencia presentada en la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana.

[160] Como ejemplo de célula generadora G. P. Mazhura (colaboradora de N. G. Salmina) distinguió "electrón en el átomo" en el programa de Química General, mientras que H. Hernández utilizó el de "combinación lineal" en Álgebra Lineal. El concepto de razón es un buen ejemplo de célula generadora en la Matemática escolar. Esta idea ha contribuido a la estructuración sistémica de los contenidos, lo cual es trascendental para el caso de las ciencias y en particular para la Matemática.

por el profesor en el estudiante y se hace perdurable, toda vez que es activable para ser aplicado, para ser modificado (enriquecido o transformado), para ser recuperado, para conectarse con otro nodo”.[161]

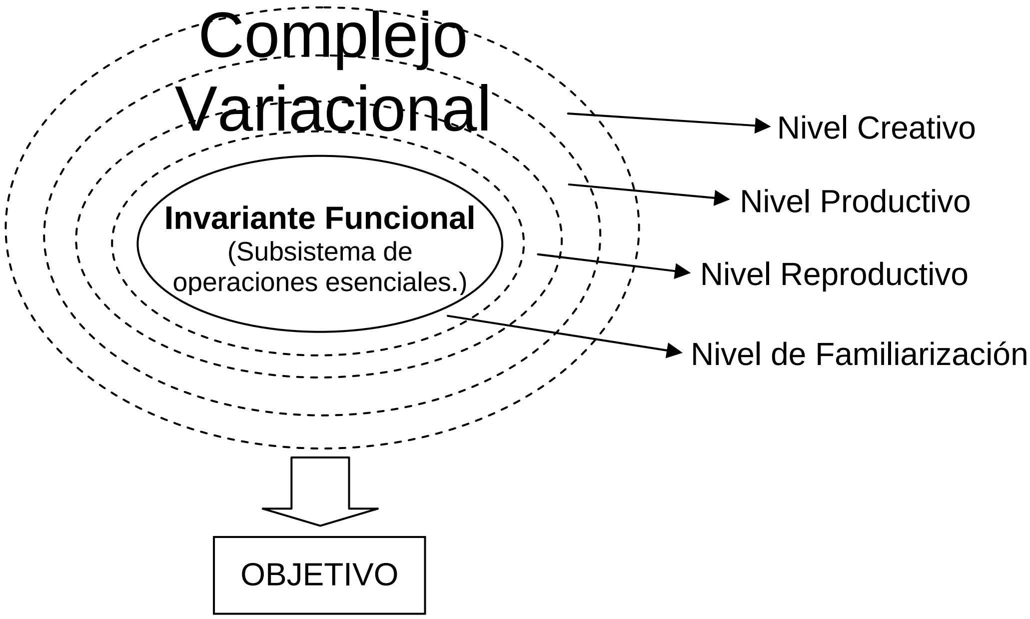

Figura 11. *Estructura general de las habilidades*

La propia autora declara la génesis de este concepto cuando afirma: “Como quiera que no siempre es factible para el profesor revelar, identificar o apropiarse a corto plazo de una célula generadora o de un invariante o de reglas y unidades básicas que le permitan conformar un sistema de conocimientos y conexiones a trabajar con el estudiante, se me ocurrió incorporar la idea de los nodos cognitivos en el quehacer matemático, como un recurso que contribuye a organizar el conocimiento de los estudiantes”.[162] Los conceptos de “número”, “variable”, “función” y “límite”, constituyen ejemplos de nodos cognitivos intramatemáticos.

El concepto de nodo no se supedita exclusivamente a los conceptos y habilidades, en general es aplicable a todo el contenido de enseñanza. Por ejemplo, dominar un teorema no significa memorizarlo, sino también saber demostrarlo y poderlo aplicar. El nodo se enriquece en la medida que se identifican las relaciones del teorema con otros contenidos, planteándose una compleja red de interconexiones. El nodo cognitivo debe estar presente en cada una de las formas de estructurar el conocimiento. “[T]odo el sistema es una red compuesta de nodos y al mismo tiempo, a partir de los nodos se va conformando una red o sistema de conocimientos, habilidades, valores, etcétera”.[163]

[161] Hernández, Ibíd., p. 10.
[162] Ídem.
[163] Ibíd., p. 11.

Para la estructuración de los contenidos mediante la utilización de los nodos cognitivos (como recurso sistematizador) es necesario es necesario determinar con claridad cuáles son los nodos que deben desarrollarse en el estudiante. Partiendo de los objetivos propuestos, la red se genera al enriquecer o transformar el nodo precedente (ya establecido en el estudiante), o al establecer su conexión con otro al cual le puede servir de base o como medio para lograr su propio desarrollo. Una vez confeccionada la red, es posible elaborar el programa correspondiente, el cual queda estructurado sobre una base sistémica.

El complejo variacional, aunque se relaciona con el nodo no coincide con él. Para explicar esto es necesario partir de una observación hecha por Talízina: "El concepto de las invariantes tiene criterios objetivos y no es como a cada cual le parezca y no puede tener, cada persona, su propia invariante, porque hay que demostrar que en efecto, en realidad, esto es una invariante, que evidentemente puede generar todo el sistema de variantes. Si eso no lo puede satisfacer, entonces, realmente no es una invariante".[164] La causa que justifica una posible confusión se basa en el hecho de que, para cada sujeto, el desarrollo de la habilidad siempre va más allá del invariante. En el próximo capítulo se explicará esto, en el caso concreto de la habilidad para resolver problemas.

El nodo cognitivo se establece en virtud de la sistematización de la ciencia. Sus conexiones son el resultado de un complejo proceso evolutivo, de manera que durante la planificación y elaboración de un currículo adquiere un carácter apriorístico. El complejo variacional es personológico, pues depende de cómo el sujeto configura la habilidad, a partir de sus propias experiencias. Esta libertad justifica la existencia de un nivel superior, esencialmente creativo.

Como nodo cognitivo sirve de ejemplo el campo de problemas sobre "cálculo de cuerpos". Normalmente, cualquier diseño curricular debe prever que esto constituye un amplio punto de acumulación del contenido, tal y como se muestra en la figura 12. Sin embargo, no es posible representar una red absolutamente completa, pues la propia naturaleza sistémica de la Matemática justifica una infinitud de conexiones con otros nodos. Esta infinitud de relaciones permite que cada sujeto configure su propio complejo variacional, el cual no tiene por qué ser absolutamente estable. La estabilidad reside en el invariante, mientras que los niveles de desarrollo de la habilidad son variables. La amplia diversidad de métodos de solución desplegados por los concursantes de las Olimpiadas de Matemática, son un ejemplo de ello.

Para tratar la habilidad de RP, en la literatura occidental se utiliza frecuentemente el término *skill* (destreza) y, en el mejor de los casos, *ability* (habilidad). En su mayor amplitud, la habilidad para resolver problemas se conceptúa como generalizada. Una habilidad es generalizada en la medida que su estructura adquiere un grado de complejidad que no responde a su nivel de desarrollo, sino a la naturaleza del objetivo al cual se subordina. Las habilidades generalizadas son formaciones psicológicas que presuponen mayor actividad mental. Justamente ellas se

[164] Talízina, N. (1994) *La teoría de la actividad de estudio como base de didáctica en la Educación Superior*. México: Universidad Autónoma Metropolitana, p. 81.

encuentran en la frontera entre habilidad y capacidad. Estas últimas responden al motivo y se constituyen en actividades realmente complejas.

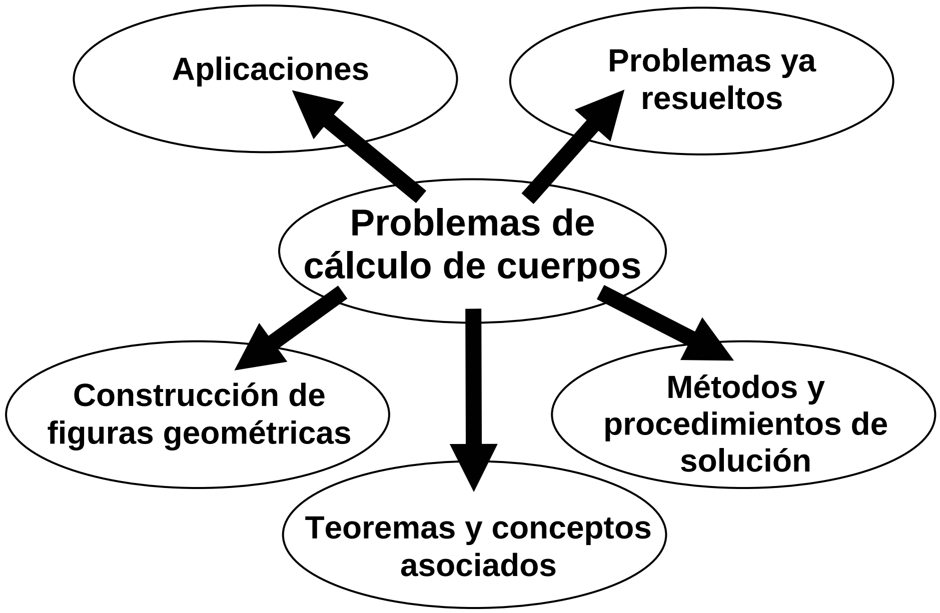

Figura 12. *Un ejemplo de nodo cognitivo*

En la escuela no es común hablar del desarrollo de capacidades matemáticas; realmente el caso queda restringido al dominio de las habilidades y hábitos. Este hecho se justifica justamente por el nivel de complejidad de las capacidades y por el tiempo relativamente prolongado que se necesita para lograr su desarrollo. Existen habilidades que pueden desarrollarse durante una clase hasta el nivel reproductivo, en la unidad hasta el nivel productivo, y en el grado hasta el nivel creativo. Asimismo, existen habilidades que requieren de un sistema de clases para asegurar el nivel más elemental de familiarización; mientras que otras habilidades, como las generalizadas, pueden requerir de más tiempo. Sin embargo, el desarrollo de las capacidades puede exigir de muchos años de estudio.

Estos hechos justifican que el problema de la clasificación de las habilidades haya sido más ampliamente abordado que el relativo a las capacidades. La clasificación más amplia que se conoce escinde las habilidades en generales y específicas. Esta dicotomía pone de relieve el grado de relación entre la habilidad y la actividad de la cual toma su contenido. Puede decirse que una habilidad es general cuando forma parte del contenido de varias asignaturas, y específica cuando se refiere al contenido de una sola de ellas. Tal clasificación es relativa, pues una habilidad definida como general puede actuar como específica a partir del contexto en que se produce la actividad. Independientemente que la estructura de la habilidad se mantenga cualquiera sea el contexto, siempre estará dotada de elementos específicos que estarán dados por los medios, los métodos y la vía que el sujeto implemente.

Esta ambigüedad puede eliminarse si se asocia a cada habilidad su contenido. Así, la habilidad “para demostrar” es general tanto en Matemática como en Física. Aunque se conserva la estructura, varían los medios, métodos y vías. Mientras que en Matemática la demostración se realiza a través de un razonamiento basado en relaciones, conceptos y procedimientos ya conocidos, en la Física las demostraciones por lo general son experimentales, basadas en leyes y fenómenos. Sin embargo, al asociar el contenido específico, la distinción anterior no tiene lugar. En efecto, no caben dudas de que la habilidad “para demostrar identidades trigonométricas” es específica de la Matemática; mientras que la habilidad “para demostrar leyes de la Mecánica” es específica de la Física.

Surge, por otro lado, una nueva dificultad. ¿Cómo estar seguro de que demostrar (en Matemática) es una habilidad cuando, hablando en términos generales, es tan compleja? ¿Por qué no enfocarla como capacidad? Estas interrogantes se justifican con toda claridad. Nuevamente es necesario precisar qué se demuestra, lo cual determinará el complejo de habilidades y hábitos asociados (complejo variacional) y que expresará si se trata de una habilidad elemental (básica), generalizada, o exige reconceptuarla como capacidad.

En un plano muy general, dentro del quehacer matemático, demostrar es una capacidad muy compleja. Kant había señalado: “Solo puede llamarse demostración una prueba apodíctica en cuanto es intuitiva. Nos señala la experiencia lo que es, pero no que lo que es no puede ser otra cosa. De manera que los argumentos empíricos no pueden proporcionar pruebas apodícticas. Mas la certeza intuitiva, vale decir, la evidencia, no puede obtenerse de conceptos *a priori*. Únicamente la Matemática contiene demostraciones, porque no toma su conocimiento de conceptos, esto es, de la intuición que puede ser dada *a priori* como correspondiente a los conceptos”.[165] Estos planteamientos son un arquetipo de agnosticismo. Para este notable filósofo “la cosa en sí” es inaccesible al conocimiento y sólo es posible conocer los fenómenos a través de los cuales esta aparece en la experiencia. Kant fracasa en su intento por “fundamentar” que el conocimiento teórico es exclusivo de la Matemática.

Desde el punto de vista lógico, una demostración consiste en un conjunto de métodos lógicos de fundamentación de la veracidad de un juicio por medio de otros juicios verdaderos y relacionados con él. Se estructura en una tesis (juicio cuya veracidad debe demostrarse), argumentos (los juicios verdaderos que se utilizan; los axiomas, definiciones, teoremas, leyes, etcétera) y la forma de la demostración (modo de conexión lógica entre la tesis y los argumentos).[166] Sin embargo, no es posible reducir la capacidad o habilidad para demostrar a la estructura lógica de la demostración.

En vista de que estas configuraciones psicológicas presuponen un proceso mental, esta estructura consiste en la expresión de dicho proceso, de manera que las

[165] Kant, E. (1781/1973) *Crítica de la razón pura* (p. 399). La Habana: Ciencias sociales. Cf. Lenin, V. I. (1909/1990) *Materialismo y empiriocriticismo*. La Habana: Pueblo y Educación, pp. 188–189 y p. 348.
[166] Guétmanova, A.; Panov, M. y Petrov, V. (1991) *Lógica: en forma simple sobre lo complejo* (pp. 86–88). Moscú: Progreso.

configuraciones mencionadas abarcan mucho más. En planos más elementales, demostrar puede conceptuarse como habilidad (en última instancia generalizada). Esto es lo que, justamente, la inserta en el ámbito escolar. El desarrollo de esta habilidad es esencial, pues favorece el pensamiento lógico y la formación de una concepción científica del mundo.

Aunque en el plano filosófico existen diferencias entre probar y demostrar, no es prudente extrapolarlo a la enseñanza elemental. Por tanto, tal y como ocurre en la escuela, los términos probar o demostrar cierta proposición matemática se referirán a la misma habilidad. No ocurrirá así con la argumentación, la cual se constituye como acción dentro del invariante funcional.

De la misma manera, resolver problemas puede enfocarse como habilidad generalizada. Tanto es así que, tal y como se analizó en el epígrafe anterior, es completamente posible hablar de “problemas de demostración”, lo cual coloca esta habilidad en un estadio superior al de la demostración. Esta afirmación es general, por cuanto la explicitación del contenido nuevamente relativiza los hechos. Así, está completamente claro que es más simple el desarrollo de la habilidad para resolver problemas conducentes a sistemas de ecuaciones lineales (propia del nivel secundario) que la habilidad para demostrar propiedades de la geometría del espacio (propia del bachillerato). No obstante, nuevamente cabe preguntarse: ¿Acaso este tipo de demostración no presupone resolver un problema? La respuesta es afirmativa, pero debe precisarse que de un contenido más complejo.

A diferencia de la teoría general de las habilidades matemáticas, las capacidades no disponen aún de una teoría sistemática y detallada. La literatura, sin embargo, registra algunos resultados que se encaminan hacia ese fin. Krutietski, por ejemplo, ha propuesto un esquema general de las capacidades matemáticas en la edad escolar:[167]

a) Recepción de la información matemática, lo cual significa la capacidad para recibir formalmente el contenido matemático y para captar la estructura formal del problema.

b) Procesamiento de la información matemática, consistente en la capacidad para:

- pensar lógicamente en la esfera de las relaciones cuantitativas y espaciales, a través de símbolos matemáticos;
- reducir el proceso de razonamiento matemático y el sistema de operaciones correspondientes, o sea, pensar en estructuras reducidas;
- lograr flexibilidad en los procesos mentales, relativos a la actividad matemática;
- generalizar rápida y ampliamente los objetos, relaciones y operaciones matemáticas;

[167] Krutietski, V. A. (1968/1986) Cuestiones generales sobre la estructura de las capacidades matemáticas (p. 196). En I. I. Iliasov y V. Ya. Liaudis (Eds.): *Antología de la psicología pedagógica y de las edades*. La Habana: Pueblo y Educación.

- reorganizar rápida y libremente la proyección del proceso mental y pasar del curso directo del razonamiento al inverso (reversibilidad del proceso mental durante el razonamiento matemático); y
- alcanzar claridad, sencillez, economía y racionalidad en las soluciones.

c) Almacenamiento de la información matemática, lo que alude a la “memoria matemática” (memoria generalizada para las operaciones matemáticas, las características tipo, los esquemas de razonamiento y las demostraciones, los métodos de solución de los problemas y los principios de enfoque de los problemas).

d) Componente sintético general, lo cual significa una tendencia o proyección matemática del intelecto.

Como puede observarse, las capacidades matemáticas (según Krutietski) no se limitan al desarrollo cuantitativo y cualitativo de los procesos de recepción, procesamiento y almacenamiento de la información, sino también al aspecto esencial que revela al hombre como agente transformador de su entorno: la proyección matemática del intelecto. Esto es, la exteriorización del conocimiento, la aplicación de los aportes científicos al desarrollo económico y espiritual de la sociedad. Por este motivo, los genios se identifican sobre la base del nivel transformador de sus aportes al desarrollo de la humanidad. Así, por ejemplo, es posible hablar del desarrollo del Álgebra antes y después de E. Galois.

Por su parte, M. Llivina ha sistematizado una teoría relativa a tres capacidades “generales” que, según él, conforman un sistema básico de competencias: identificar, plantear y resolver problemas. He aquí un nuevo concepto incorporado a la DM en la actualidad: el de competencia. Llivina, después de reconocer que las capacidades existen como potencialidades del ser humano, que tienen una naturaleza psicológica y que pueden ser generales o específicas, plantea: “Estos resultados […] permiten establecer una *correspondencia biyectiva* entre las competencias y las capacidades […]”.[168]

En primer lugar, si tal correspondencia biyectiva tiene lugar, qué necesidad existe de conceptuar este “nuevo” constructo. En términos lógicos, este esfuerzo solo conduce a redundar sobre el concepto de capacidad. En segundo lugar, sobre la base del análisis filosófico realizado en el epígrafe anterior, no está totalmente claro que sea posible reducir la actividad matemática (escolar o no) a la identificación, planteo y resolución de problemas.

De todas formas, la idea de Llivina se traduce en un campo bastante amplio dentro del ámbito de las capacidades matemáticas del contexto escolar. Tal es así que, como él mismo afirma, “los autores han abordado con mucha profundidad la tercera [resolver problemas], las dos primeras están en fase de elaboración teórica […]”.[169] Es más, este hecho no resulta sorprendente, si toma en cuenta que históricamente

[168] Llivina, M. J. et al. (2000) *Un sistema básico de competencias matemáticas*. Ponencia presentada en el evento internacional “Contextualización de problemas matemáticos y desarrollo de competencias”. Fundación Colegio UIS, Santander, Colombia, § III.1 (sin itálicas).
[169] Ibíd., § III.2.

los currículos han reducido la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática a la resolución de problemas. En el capítulo 5 se expondrán con más detalle otras ideas sobre la formulación de problemas, las cuales, si bien guardan una estrecha relación con lo que Llivina y muchos otros autores denominan “identificar” o “plantear” problemas, sigue un derrotero completamente distinto.

Es necesario destacar que tanto las habilidades como las capacidades, desde su status de configuraciones psíquicas predominantemente cognitivas, integran flexible y funcionalmente tres dimensiones funcionales, en la unidad con la esfera afectivo–motivacional. Estas dimensiones son un producto del reconocimiento de la naturaleza histórico–social de las habilidades y capacidades, en unidad dialéctica de lo social y lo individual.

En primer lugar figura la *dimensión procesal*, que comprende los procesos cognitivos que intervienen en la actuación del sujeto, tales como la memoria, la imaginación, el pensamiento y la sensopercepción. Con mucho acierto Llivina plantea: “La dimensión procesal tiene su salida en la calidad con que estos procesos transcurren y en lo referido a la metacognición, esto es cualquier tipo de manifestación de los conocimientos del sujeto acerca de sus propios conocimientos relativos a determinado suceso y el control de su ejecución en el mismo, a través del autoconocimiento, autocontrol, autoevaluación y autovaloración”.[170]

Córdova ha propuesto un grupo de subindicadores para evaluar la calidad de los subprocesos.[171] Ellos son:

a) independencia (posibilidad de seguir una línea de pensamiento propia y modos de procesamiento autónomos),

b) fluidez (número de ideas o producciones que el sujeto es capaz de generar en un contexto determinado),

c) flexibilidad (variedad de recursos que emplea, diversidad de modos para interpretar la situación y posibilidad de modificar el rumbo de la actividad cuando sea pertinente),

d) elaboración (riqueza de detalles en el análisis; posibilidad de lograr un elevado nivel de profundidad en una idea, clarificándola, expandiéndola, descubriendo deficiencias y realizando redefiniciones),

e) logicidad (seguimiento de un orden coherente, sin saltos arbitrarios y con la debida fundamentación),

f) profundidad (penetración en la esencia de los hechos o fenómenos, buscando generalizaciones, leyes, regularidades, abstrayéndose de lo que no es significativo),

g) y la productividad (equilibrio entre la velocidad del procesamiento de la información y de solución y ejecución de las tareas; así como la adecuación, precisión y calidad que se va logrando en las mismas).

---

[170] Ibíd., § III.1.

[171] Córdova, Ma. D. (1997) *La estimulación intelectual en situaciones de aprendizaje*. Tesis doctoral no publicada. ISP “Enrique José Varona”, La Habana.

Es justo señalar que, la consideración o no de cada uno de estos subindicadores, dependerá del contenido específico de la habilidad o capacidad que se evalúa. El segundo indicador se refiere a la metacognición, el cual incluye dos subindicadores:

a) el metaconocimiento (conocimiento y conciencia que el sujeto tiene de las estrategias utilizadas, de los lados fuertes y débiles durante su ejecución, preferencias o tendencias hacia un determinado estilo o modalidad de procesamiento, de sus posibilidades intelectuales, así como el grado de conciencia acerca de las tareas que realiza, sus condiciones, requisitos, exigencias y obstáculos involucrados), y

b) el control ejecutivo (dominio y uso de la planificación, supervisión, corrección, comprobación, evaluación y los subprocesos que caracterizan el control y autorregulación de la actividad que se realiza[172]).

Un estudio sobre cómo realizar la evaluación de esta y las demás dimensiones, sobre la base del análisis cualitativo–cuantitativo de los indicadores y subindicadores, se expondrá en el capítulo 7.

En segundo lugar figura la *dimensión instrumental*, que abarca el conjunto de acciones y operaciones constituyentes, así como el sistema de conocimientos que el sujeto aplica durante su actuación. Este sistema ha sido denominado "bases del conocimiento". Rubinstein afirmaba: "Pensamiento y conocimiento, empero, son inseparables. Donde el pensar se nos ofrece como descubrimiento de nuevos conocimientos, utiliza, también, otros ya asimilados. Este hecho sirve de base para la teoría según la cual pensar significa evocar y aplicar conocimientos. Veremos que esto no es cierto si con dicha afirmación se entiende que el pensamiento es ya una evocación de conocimientos y se reduce a ello. Es justo, en cambio, si se interpreta en el sentido de que evocar conocimientos es ya pensar y lo presupone".[173] Particularmente, el hecho concreto de aplicar y utilizar ciertos conocimientos durante la resolución de un problema, se denomina "actualización" de estos conocimientos.[174]

De la misma manera, esta dimensión puede ser evaluada pero, en lo que a sistema de acciones y operaciones se refiere, es necesario destacar que esto depende de la actividad específica que tiene lugar. En general, es necesario recurrir básicamente a la estructura del invariante funcional, complementado con su correspondiente complejo variacional. Si bien la estructura del primero es bastante estable, la segunda lo es en menor grado. De todas formas, una vez precisada cada acción y operación, así como el conjunto de habilidades y hábitos correlacionados en la actividad, es posible realizar la medición a través de subindicadores tales como la frecuencia (número de veces que se ejecutan los componentes), la periodicidad (distribución temporal de las realizaciones) y la complejidad (grado de dificultad en los diferentes subprocesos).

---

[172] Véase Labarrere, A. F. (1996) *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. La Habana: Pueblo y Educación.
[173] Ibíd., 1966, p. 70.
[174] Véase el artículo *El proceso del pensar y la utilización de los conocimientos*, de K. A. Slavskaia (incluido en Rubinstein, Ibíd., pp. 189–245).

Finalmente, en tercer lugar, figura la *dimensión afectivo–motivacional* que comprende la formación de motivaciones intrínsecas respecto a la actividad realizada, así como el sistema de autovaloraciones, intereses y expectativas respecto a la misma.

El estudio de las fases, por las cuales transcurre el proceso docente educativo de las habilidades, ha sido objeto de análisis por parte de muchos investigadores. La escuela soviética de Psicología desarrolló un trabajo de suma importancia por la sistematicidad que logró en sus aportaciones teóricas. Así, hoy no es posible una incursión exhaustiva en la teoría de las habilidades pasando por alto la *Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales* (TFEAM), cuya génesis se encuentra en los trabajos de P. J. Galperin. La obra de este autor se inicia en la década de los años 40; y sus presupuestos más elementales subyacen en la Teoría General de la Actividad, la cual ya ha sido explicada. Para este autor, el proceso de interiorización transcurre a través de tres grandes fases: orientación, formación de la acción, y aplicación.

Algunos autores trivializan las tesis de Galperin, o bien las "enriquecen" con ideas triviales. En algunas tesis de grado aparecen, por ejemplo, "aportes teóricos" que describen la presencia de diferentes etapas en la formación de las habilidades. Se trata de descripciones de fases análogas a la natural planificación, organización, ejecución y evaluación, hecho natural que se desprende de los conocimientos que hoy día albergan las Ciencias Pedagógicas[175]. En sentido general, es posible identificar dos grandes etapas: la formación y el desarrollo. Tomando como base las observaciones anteriores, puede comprenderse que la formación apunta hacia el invariante funcional, mientras que el desarrollo no es más que una extensión de la formación y apunta hacia lo que más arriba fue denominado complejo variacional.

La TFEAM considera el estudio como un sistema de actividades específicas, cuya realización conduce al alumno a la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades, valores, etcétera; en fin, a su formación integral como ser humano. Galperin señalaba: "Acordemos llamar estudio a toda actividad, pues como resultado en su ejecutar se forman nuevos conocimientos y habilidades o los antiguos conocimientos y habilidades adquieren nuevas cualidades".[176]

Esta teoría también plantea que las acciones tienen, en primer lugar, un carácter generalizado pues, al depender del objetivo, pueden manifestarse en diversos tipos de actividades. En segundo lugar, tienen un carácter desplegado, caracterizado por el hecho de que, en determinada etapa de la actividad mental, las acciones son tomadas en cuenta, pero no se actualizan ni se convierten en objeto consciente. En tercer lugar, se encuentra el carácter asimilado, caracterizado por el grado de automatización de la acción, de manera que desaparece gradualmente del plano consciente, pero se conserva al nivel de lo inconsciente. En el estudio de las acciones se definen tres fases: la orientadora, la ejecutora y la de control.

[175] Algunos autores cubanos dividen la ejecución en motivación, orientación, y "ejecución en sí misma". Esto es "grasa grasienta" en términos leninistas.

[176] Galperin, P. Ya. (1965) Sobre las bases psicológicas de la enseñanza programada. *Nuevas investigaciones en las ciencias pedagógicas*, cuarta edición, p. 15, Moscú.

Un aporte esencial de esta teoría consiste en la introducción del concepto de "Base Orientadora de la Acción" (BOA), así como el estudio gradual del mismo, tanto en forma teórica como experimental. La BOA puede caracterizarse como el sistema de conocimientos y habilidades que regulan la ejecución de la acción. La BOA apunta directamente hacia la fase orientadora, jugando un papel decisivo, pues determina la rapidez, calidad y racionalidad de la acción. Indirectamente, también apunta hacia las otras fases, garantizando la realización correcta de la actividad. La BOA puede darse al alumno en forma preparada, pero también puede ser elaborada independientemente por este.

Por vía experimental, los seguidores de Galperin descubrieron cuatro tipos de BOA, (las cuatro primeras de la figura 13). Su clasificación toma como fundamentos las diferencias que se establecen en la amplitud, la plenitud y el modo de obtención de la BOA. En general, desde el punto de vista teórico, son posibles ocho de ellas.[177]

	Característica de la BOA según su amplitud	**Característica de la BOA según su plenitud**	**Característica de la BOA según el modo de obtención**
1	Concreta	Incompleta	Elaborada independientemente
2	Concreta	Completa	Se da preparada
3	Generalizada	Completa	Elaborada independientemente
4	Generalizada	Completa	Se da preparada
5	Generalizada	Incompleta	Se da preparada
6	Generalizada	Incompleta	Elaborada independientemente
7	Concreta	Completa	Elaborada independientemente
8	Concreta	Incompleta	Se da preparada

Figura 13. *Tipos de BOA*

Como puede observarse, la octava BOA constituye el tipo más difundido de orientación en la enseñanza tradicional. En la escuela el maestro da, por regla general, indicaciones concretas respecto a la solución de problemas concretos. Los puntos de referencia indicados no agotan las condiciones necesarias para un cumplimiento correcto de las acciones, lo cual conduce a que los alumnos cometan errores.[178] Las investigaciones teóricas recomiendan las BOA 3 y 4. Sin embargo, en muchas de ellas no queda claro si los estudiantes de calificaciones regulares pueden o no mejorar sus resultados con otras BOA.

En efecto, cuando se tabulan los resultados, los aprobados se distinguen de los suspensos, pasando por alto los niveles cualitativos.[179] Algunos autores hoy día critican este hecho, alegando también que descuidan los estilos de aprendizaje del estudiante. Por ejemplo, Fariñas señala que la BOA 3 no ha sido bien acogida por algunos sujetos, lo cual revela la heterogeneidad del proceso de interiorización. La comprensión no solo depende de la calidad de las orientaciones, "sino también de la

[177] Véase Talízina, Ibíd., pp. 89–100.
[178] Ibíd., p. 100.
[179] Se trata de un refinamiento de la clasificación, tal y como se verá en el capítulo 6.

fenomenología de las preferencias, de los modos de vivenciar el mundo por parte de cada persona (no se puede separar la interiorización de la exteriorización)”.[180]

§§ 3.3.3 Convergencia y divergencia del pensamiento

No es posible un abordaje del proceso de RP al margen de la forma en que se despliega el pensamiento correcto. La mayoría de los autores delimitan dos tipos de pensamiento, los cuales sirven para caracterizar los esquemas de razonamiento que tienen lugar. Por una parte se distingue el pensamiento convergente, el cual se erige a través de operaciones lógicas claramente identificables. Es predominantemente deductivo y esperable a priori. Por otra parte se encuentra el pensamiento divergente, matizado por acciones predominantemente inductivas, creativas por naturaleza.

Ambos tipos de pensamiento no ocurren de manera aislada, sino que se combinan y complementan. Existe pensamiento divergente en los razonamientos más deductivos. Lenin en sus *Cuadernos Filosóficos* escribió “en la generalización más sencilla, en la idea general más elemental […], hay cierta partícula de fantasía”. De la misma manera, el análisis a posteriori de un razonamiento creativo revela una perfecta secuencia de operaciones lógicas. La experiencia ha demostrado que el proceso de RP comprende ambos tipos de pensamiento, así que es oportuno profundizar un poco en esta temática.

El pensamiento correcto se compone de operaciones lógicas, las cuales se estructuran desde niveles más simples hasta otros cada vez más complejos. Por este motivo, al explicar la naturaleza de los pensamientos convergente y divergente, no puede confundirse lo funcional con lo estructural. En efecto, ambos tipos de pensamiento son lógicos por su contenido; la diferencia reside en la forma en que tienen lugar, la naturaleza del producto generado, y ciertos rasgos distintivos de la personalidad. Pasar por alto esta precisión originaría un dilema teórico para la creatividad: la paradoja de ser “ser lógica a posteriori”.

Las operaciones primarias del pensamiento humano (y en general de toda la cognición) son el análisis y la síntesis. El primero consiste en la desmembración mental del objeto en sus partes, permitiendo descubrir su estructura. El fin del análisis es determinar lo esencial; llegar al conocimiento de los componentes y los nexos que les son inherentes. No obstante, el análisis lleva al desglose de una esencia no ligada aún a las formas concretas de su manifestación. La unidad, que sigue siendo abstracta, no se descubre todavía como unidad en la diversidad. Esta limitación la resuelve la síntesis. En efecto, esta última operación consiste en la unión dialéctica de los componentes y relaciones esenciales, revelados por el análisis; va de lo idéntico a la diferenciación, asocia lo general y lo singular, la unidad y la multiplicidad de un todo concreto. La síntesis complementa el análisis y forma con él una unidad indisoluble.

[180] Fariñas, G. (1999) Hacia un redescubrimiento de la teoría del aprendizaje. *Revista Cubana de Psicología*, 16 (3), p. 231.

Rubinstein observó que el análisis de un problema se inicia abarcando el campo entero de la situación dada. “A medida que el análisis avanza, va dejando de lado las zonas (espaciales) y los aspectos del problema que no resultan esenciales para la solución, que no conciernen a la esencia de la cuestión que se ventila. Se van desgajando uno a uno o bien por zonas enteras, por aspectos complejos. De esta manera el análisis se va concentrando en un radio de acción cada vez más reducido y más directamente vinculado al problema que se resuelve. El análisis tiene, al principio, un carácter extensivo, y poco a poco se va haciendo intensivo”.[181]

Con gran acierto este psicólogo ruso defendió la tesis de que el proceso del pensamiento es un proceso de análisis a través de la síntesis. “La síntesis pasa sin cesar al análisis y recíprocamente. […] Por sintética que sea la especificación conceptual de un fenómeno, cualquiera que sea, constituye de todos modos por una parte un producto del análisis de la realidad, y por otra de la abstracción de varios de sus facetas. De modo análogo: por más que se extienda el análisis que lleva a un concepto, cualquiera que sea, este último encierra en sí un nexo, sujeto a ley (síntesis), de los aspectos esenciales del fenómeno”.[182]

Estas operaciones más elementales configuran otras algo más complejas como la comparación, la abstracción y la generalización. La primera de ellas permite confrontar entre sí los objetos y fenómenos, descubriendo su identidad o sus diferencias, lo cual constituye una operación esencial de la clasificación (como acción más compleja). La confrontación antes señalada justifica que la comparación se origine como una síntesis, pero a su vez este acto sintético implica un análisis de los elementos comparados. Por su parte, la abstracción, según Rubinstein, “consiste en la división, desmembración y separación de una determinada faceta, de una cualidad, de un dato o factor, de un fenómeno o un objeto, en tanto estos sean esenciales en cualquier forma […]. La abstracción en sus formas superiores es un resultado, un aspecto de mediación o descubrimiento de cualidades cada vez más esenciales de las cosas y fenómenos por medio de sus nexos y de sus relaciones”.[183]

La abstracción designa tanto el proceso de separación como su producto, por tanto, es el resultado de un proceso analítico–sintético. En el proceso de la abstracción salen a colación ciertas posibilidades subjetivas del ser humano. Por ejemplo, es imposible “contar” toda la serie de números naturales, pero esto no es óbice para que resulte imposible hacer la abstracción del “infinito actual”. Todo conocimiento se halla indisolublemente unido a procesos de abstracción. La totalidad de los objetos matemáticos son abstracciones humanas, sin las cuales no sería posible penetrar en la esencia de la realidad objetiva.

Por su parte, la generalización es una operación lógica que permite el paso de un concepto específico a otro genérico, quitando del primero cierto indicio (indicios) especificador. En el proceso del conocimiento la generalización es un proceso continuo, que tiene por límite únicamente las categorías (por ejemplo, en Filosofía, son categorías del Materialismo Dialéctico la materia, la conciencia, la verdad,

[181] Ibíd., 1966, p. 44.
[182] Ibíd., p. 49.
[183] Ibíd., 1967, p. 395.

etcétera).[184] Naturalmente, esta caracterización lógica expresa el resultado final de un proceso de análisis y abstracción, cuyo contenido y forma resultan mucho más complejos. El pensamiento llega a generalizaciones cada vez más altas a medida que descubre conexiones más profundas, a medida que el análisis separa los componentes más esenciales de los que resultan contingentes, casuales.

La generalización está ligada indisolublemente al razonamiento matemático. Por ejemplo, a partir del teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se demuestra que la suma correspondiente al n–ágono es igual a (n–2)·180º. La demostración deductiva de este nuevo teorema revela un proceso de generalización; mientras que el teorema, el juicio demostrado, constituye la generalización como resultado final. Esto demuestra, como se expresó más arriba, que la operación mental que tiene lugar va más allá de la expresión lógica.

El proceso contrario a la generalización consiste en la limitación y expresa el paso de lo general a lo particular. Rubinstein observó que “el razonamiento necesario y demostrativo puede no ir de lo general a lo particular, sino de lo particular a lo general. Un buen ejemplo de ello consiste en el método de inducción completa. Semejante razonamiento lleva a la generalización, premisa necesaria del conocimiento *teorético*. Resolver un problema en el plano teórico significa resolverlo no sólo con vistas a un determinado caso concreto sino para todos los casos homogéneos. El conocimiento teorético presupone la generalización. La generalización resulta del análisis y de la abstracción, hace posible el conocimiento teórico”.[185]

En Matemática son frecuentes los razonamientos deductivos que expresan el tránsito de lo general a lo particular. Sin embargo, el camino recíproco está más cerca del pensamiento creativo. En efecto, la inducción es una manifestación del paso de lo particular a lo general. Solo el análisis y la abstracción permiten al sujeto formularse hipótesis sobre la base de los indicios esenciales. Estas hipótesis pueden ser ciertas o no, y su verificación o refutación[186] subyace nuevamente sobre la base del razonamiento deductivo. Un arquetipo de razonamiento inductivo es la “inducción euleriana”, tal y como se vio en el capítulo 1.

En vista de que la búsqueda de generalizaciones es una actividad intrínseca del quehacer matemático, es natural que sea necesario hacer uso de esta operación mental en contenidos de complejidades muy disímiles. Así, por ejemplo, es un hecho

[184] Véase Guétmanova, Ibíd., 1989, pp. 63–65.
[185] Ibíd., 1966, pp. 59–60.
[186] La historia de la Matemática relata muchas anécdotas interesantes sobre generalizaciones falsas. Una de las más conocidas es la suposición de Fermat de que los números de la forma $F_a = 2^{2^a}+1$ son primos $\forall a \in \mathbf{N}$, lo cual fue refutado por Euler al observar que $F_5 = 641 \cdot 6700417$. Todavía, en épocas contemporáneas, estos hechos tienen lugar. Por ejemplo, en 1968 M. Gardner conjeturó sobre la base de casos particulares que la suma de dos números amigos pares es divisible por 9 (220+284 = 9·56, 1184+1210 = 9·266, 2620+2924 = 9·616). Sin embargo, un año más tarde Elvin J. Lee refutó esta afirmación en un artículo publicado en *Mathematics of Computation*. El par más pequeño que hace falsa esta conjetura es 666030256 y 696630544.

notable la enorme cantidad de generalizaciones del teorema de Pitágoras.[187] Probablemente la más natural consiste en considerar los cuadrados inscritos sobre los lados, como casos particulares de figuras semejantes. Es admisible que los indicios "visuales" evoquen esta generalización a manera de operación (véase la figura 14).

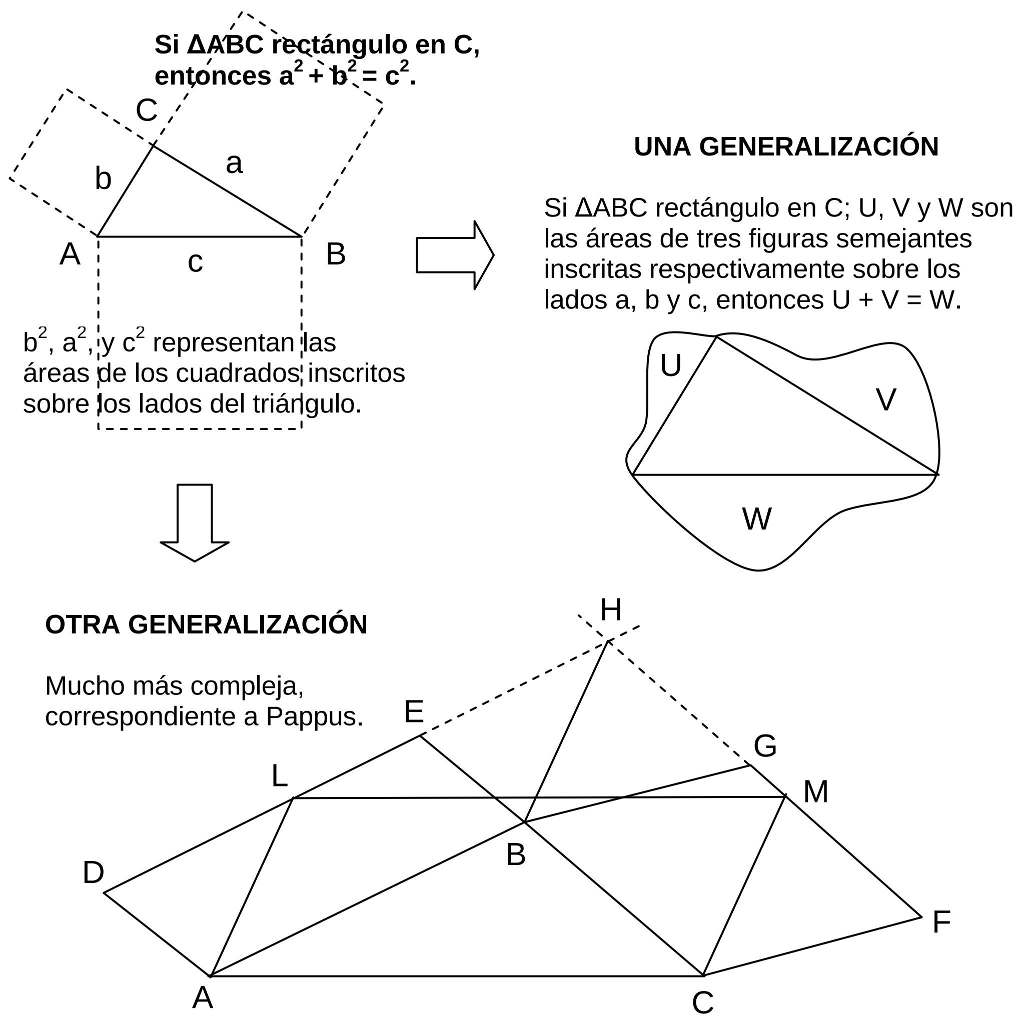

Figura 14. *Generalizaciones del teorema de Pitágoras*

Es un hecho la inagotable posibilidad de hallar generalizaciones más sofisticadas. Tomando como base otros indicios mucho menos evidentes, se arriba a la conocida generalización de Pappus, la cual presupone una actividad mental indiscutiblemente más compleja. En efecto, si en el triángulo arbitrario ABC se construyen: (1) dos paralelogramos cualesquiera ADEB y BGFC; (2) un paralelogramo ACML, a

[187] Se conocen más de mil. Consúltese, por ejemplo, Lages, E. (1991) *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do professor de Matemática, Sociedad Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro: LAMGRAF Artesanato Gráfico.

condición de que AL = CM = BH (H = DE $\cap$ FG), entonces se cumple que $A_{ACML} = A_{ADEB} + A_{BGFC}$, donde A_{Ω} designa el área de Ω (figura 14). Es realmente difícil concebir esta idea sobre la base del teorema de Pitágoras, pues no solo se parte de un triángulo arbitrario (caso general), sino también de paralelogramos (una generalización del concepto de cuadrado).

Es necesario reiterar que al enfocar la generalización como operación, se asume el sentido más elemental respecto al contenido procesado. En una dimensión superior es posible hablar de "habilidad para generalizar"; incluso de "capacidad para generalizar". Lo mismo ocurre con el resto de las operaciones antes mencionadas. El proceso generalización puede tener una naturaleza sintética o analítica. Por ejemplo, al observar que 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, …, la generalización sintética llevó a Chr. Goldbach a plantear su conjetura sobre la expresión de los números pares como suma de dos números primos. Por su parte, la generalización analítica condujo a W. R. Hamilton a la creación de los sistemas numéricos hipercomplejos.[188]

En el campo de la RP la generalización juega un papel muy importante. El propio Rubinstein observó que incluso la reducción de un problema a otro ya resuelto alberga una generalización, por cuanto "[t]ransferir la solución de un problema a otro significa, en realidad, *dar una solución generalizada de ambos problemas*. La 'transferencia' tiene su base en una generalización y esta, a su vez, descansa en el análisis vinculado a la síntesis".[189]

Un papel muy especial dentro del pensamiento humano lo desempeña la analogía. Esta acción mental constituye un razonamiento sobre la pertenencia a un objeto o clase de objetos homogéneos de un determinado indicio (propiedad o relación), a partir de la semejanza de indicios sustanciales con otro objeto (o clase de objetos homogéneos). La analogía tiene una naturaleza heurística y expresa la manifestación más genuina del razonamiento matemático. En el caso anterior, relativo al teorema de Pitágoras, un razonamiento por analogía conduce al siguiente teorema análogo: En el tetraedro trirrectangular (en el vértice O, según la figura 15) se cumple que $A_{ABC} = A_{AOC} + A_{AOC} + A_{BOC}$.

El establecimiento de analogías, junto a la generalización, juega un papel esencial en la actividad matemática. Tanto es así que el célebre matemático S. Banach afirmaba: "Un matemático es una persona que puede encontrar analogías entre teoremas; un matemático mejor es aquel que ve analogías entre demostraciones, y el mejor de ellos puede distinguir analogías entre teorías. Uno puede imaginar que el matemático supremo es aquel que consigue ver analogías entre analogías".[190] Por este motivo, en el próximo capítulo se abordará la analogía con más detalle, como parte del razonamiento heurístico.

---

[188] Véase Gorsky, D. (1987) *Generalization and cognition*. Moscow: Progress Publishers.
[189] Ibíd., 1966, p. 98 (sin itálicas).
[190] Esta cita aparece en una autobiografía de su discípulo Ulam, S. M. (1976/1991) *Adventure of a Mathematician*. Berkeley: University of California Press (disponible de manera restringida en http://ark.cdlib.org/ark:/13030/ft7290080j/).

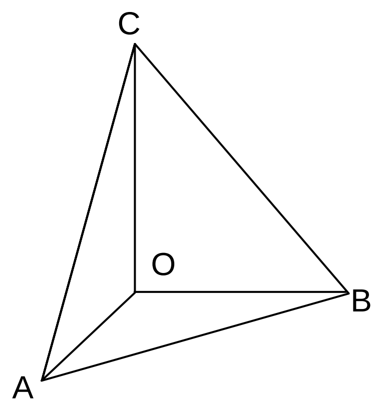

Figura 15. *Un análogo del teorema de Pitágoras*

En el capítulo 2 se hizo referencia a la génesis del pensamiento formal, sobre la base de operaciones concretas ya establecidas. La epistemología Genética fundada por Piaget se erige sobre tres ideas fundamentales:

a) el pensamiento lógico puede ser considerado como un conjunto de operaciones lógicas,

b) la estructura cognitiva de la inteligencia es un dominio independiente, y

c) el proceso de desarrollo puede explicarse como una clase de adaptaciones biológicas por una noción de equilibrio.

Aunque la Epistemología Genética ha sido criticada en muchos de sus aspectos, es necesario considerar la primera de estas ideas en la RP. Al considerar el pensamiento lógico como un conjunto (muy complejo) de operaciones lógicas, Piaget estudia las estructuras cognitivas construidas por operaciones lógicas sobre objetos cognitivos. Partiendo de este enfoque él presenta varias estructuras matemáticas como modelos de estructuras cognitivas. Entre estas estructuras figuran las redes y el grupo INRC, con el correspondiente retículo de 16 operaciones binarias.

El grupo INRC es un sistema que permite al sujeto considerar varias posibilidades cuando debe resolver cierta clase de problemas. Inhelder y Piaget[191] definen este sistema, partiendo de cuatro leyes estructurales:

a) *Identidad*, la cual constituye una proposición tal y como es (por ejemplo, incrementar cierta cantidad: +5);

b) *Negación*: consistente en la anulación de la proposición (por ejemplo, no incrementar: +0);

c) *Reciprocidad*, que expresa la proposición opuesta (por ejemplo restar la cantidad incrementada: –5); y

[191] Inhelder, B. y Piaget, J. (1955) *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent*. *Essai sur la construction des structures opératoires formalles.* Paris : PUF.

d) *Correlación*, que significa la anulación de la reciprocidad (por ejemplo, no restar ninguna cantidad: –0).

La estructura así definida es isomorfa al 4–grupo de F. Klein y ha sido muy poco abordada en la literatura psicológica. Por ejemplo, Pozo y Carretero señalan que "su utilidad para la práctica educativa cotidiana es bastante remota".[192] Los estudios regularmente giran en torno a problemas de proporciones, de equilibrio hidrostático, de probabilidades, y de doble sistema de referencia. Un estudio interesante ha sido desarrollado por H. S. Yun, en el ámbito de la teoría estética de los colores. Partiendo de la semántica estética de los colores, donde el malva significa lo espiritual y celestial, mientras el amarillo significa lo humano y terrenal, considera el malva, el rosado, el amarillo, y el amarillo claro, como I, N, R, y C, respectivamente.[193] Específicamente, dentro del campo de la DM, la cantidad de investigaciones es todavía menor. Sirva de ejemplo que en la ya mencionada base de datos MATH–DI solo se registra un trabajo con índice básico igual a INRC.

Para ilustrar la aplicación del grupo INRC a la RP se tomará como ejemplo un conocido problema de doble sistema de referencia. En la figura 16 aparece representado un caracol sobre una tabla, la cual se encuentra apoyada sobre el piso.

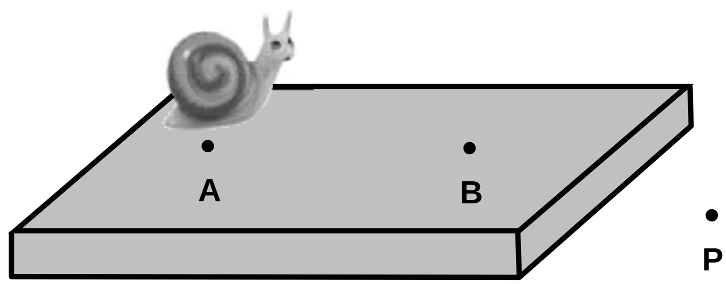

Figura 16. *El grupo piagetiano INRC en un problema de doble sistema de referencia*

Es posible considerar cuatro movimientos horizontales. Por ejemplo, partiendo del movimiento del caracol desde el punto A hasta el punto B, quedan definidas las transformaciones:

I (Identidad) = movimiento del caracol de A a B,

N (Negación) = movimiento del caracol de B a A,

R (Reciprocidad) = movimiento de la tabla de B a A (respecto a P), y

C (Correlación) = movimiento de la tabla de A a B (respecto a P).

---

[192] Pozo, J. I. y Carretero, M. (1986) Desarrollo cognitivo y aprendizaje escolar. *Cuadernos de Pedagogía*, No. 133, p. 15.
[193] Yun, H. S. (2004) *INRC group structures in color aesthetics*. Kangwon National University, Korea (disponible en http://www.aare.edu.au/94pap/yunh94010.txt).

Como puede observarse, la esencia reside en la existencia de dos sistemas de referencia: uno fijo exterior (el piso) y otro móvil interior (la tabla). El niño que está en el estadio de las operaciones concretas no puede distinguir ambos sistemas, limitándose exclusivamente al movimiento del caracol respecto al sistema fijo interior. Este niño solo puede concebir las transformaciones de identidad y negación (subgrupo IN).

Un problema que dimana de esta situación puede ser el siguiente: ¿Qué pasa si ocurren simultáneamente las transformaciones I y R? Esto significa que a la vez el caracol se moverá de A a B y la tabla de B a A (respecto a P). Cuando los movimientos culminan, el caracol seguirá ocupando la posición A en relación al punto exterior P. Para el adulto que domina las operaciones formales, este problema y su respuesta son fácilmente entendibles. Para el niño de las operaciones concretas esto es demasiado complicado. A lo sumo puede imaginar que si el caracol va de A a B, y luego de B a A, entonces vuelve al mismo punto de partida. Sin embargo, no alcanza a comprender cómo en el problema, habiendo ido de A a B, puede quedar en el mismo lugar.

Es evidente que un problema equivalente consiste en determinar qué pasaría si ocurren simultáneamente N y C. La respuesta es la misma, de modo que IR = NC. Desde un punto de vista algo más abstracto se trata de una operación multiplicativa "∗", definida sobre el conjunto {I, N, R, C}. En este caso I∗R significa la identidad de la reciprocidad, y N∗C la negación de la correlación. Efectivamente, I∗R = R y N∗C = R. De la misma manera se verifica que las correspondientes 16 operaciones pueden hallarse a través de la siguiente tabla:

∗	**I**	**N**	**R**	**C**
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Figura 17. *El grupo INRC de Piaget*

Como puede verse, se trata de un grupo conmutativo, por la simetría que existe respecto a la diagonal principal. Desde el punto de vista lógico queda clara la interpretación N∗N = I, como la identidad de la proposición original a partir de la negación de la negación. Visto así, en general la asociatividad facilita la resolución de problemas aún más complejos como I = N∗R∗C (operación ternaria), N = N∗R∗C∗N (operación cuaternaria), etcétera.

En la última operación es necesario comprender que la correlación de la negación es la reciprocidad ($C*N = R$), luego que la reciprocidad de la reciprocidad es la identidad ($R*[C*N] = R*R = I$), y finalmente que la negación de la identidad es la propia negación ($N*I = N$). Por tanto, en la secuencia de operaciones cada una no necesariamente toma como argumento la proposición original (el movimiento del caracol de A a B sobre la tabla fija).

Es evidente que mucho queda por hacer en relación a las aplicaciones del grupo piagetiano a la RP. Una observación importante ha sido hecha por Mishima y Kikuchi.[194] Apoyados en la Teoría General de Modelos de H. Yoshikawa, en la cual los modelos y el conocimiento modelado se representan matemáticamente utilizando espacios topológicos, introducen el concepto de rango, de acuerdo al nivel de abstracción del conocimiento. En primer lugar, el conocimiento sobre objetos físicos existentes se denomina conocimiento de rango 0. La abstracción de este es un conocimiento de rango 1, y la abstracción de este último es de rango 2. De esta manera, en la Epistemología Genética ellos introducen tres estructuras de la forma (n, n+1), a partir de conocimientos de rango n+1 que operan sobre otros de rango n.

En la etapa preoperacional distinguen una estructura de tipo (0,1), pues constituye un conjunto de operaciones defectivas sobre las operaciones cognitivas ya formadas en la etapa sensomotora. En la etapa operacional observan una estructura de tipo (1,2), partiendo de que la combinación y reversibilidad de las operaciones de un conocimiento de rango 1, constituye un conocimiento de rango 2. Finalmente, en la etapa de las operaciones formales existe el pensamiento como conocimiento de rango 2, donde operan las transformaciones I, N, R y C. Por tanto, para Mishima y Kikuchi el grupo piagetiano es una estructura de tipo (2,3).

Para continuar profundizando en la naturaleza del pensamiento lógico formal, es necesario considerar (además de su estructura) sus características funcionales. Se trata de los rasgos generales de este pensamiento que representan formas, enfoques o estrategias para resolver problemas. Pozo y Carretero[195] identifican tres características fundamentales del estadio formal:

a) *Lo real es concebido como un subconjunto de lo posible*. Ahora el adolescente es capaz de tener en cuenta no solo los datos reales presentes, sino también los potenciales o posibles. A diferencia de los estadios anteriores, será capaz de considerar no solo la relación causa–efecto, sino también las combinaciones posibles entre las causas.

b) *Carácter proposicional*. Al razonar no tanto sobre los hechos reales como sobre los posibles, el adolescente trabaja no solo con los objetos reales, sino con representaciones proposicionales de los objetos. El vínculo para esas representaciones suele ser el lenguaje. Para resolver un problema no tendrá que hacer efectivamente todas las acciones posibles, sino que podrá sustituir algunas por conclusiones de razonamientos expresados verbalmente.

---

[194] Mishima, M. and Kikuchi, M. (2005) General design theory and genetic epistemology*. Proceedings of 15th International Conference on Engeineering Design*, Melbourne (disponible en http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp /~kikuchi/papers/iced05ge.pdf).
[195] Ibíd., pp. 15–16.

c) *Uso del pensamiento hipotético–deductivo*. Es el núcleo del pensamiento científico. Ante una situación los adolescentes no solo trabajan sobre las posibilidades que esta ofrece, formulando diversas hipótesis que explican los hechos presentados, sino que además son capaces de comprobar sistemáticamente el valor de cada hipótesis que se formula. En esta comprobación suele ocupar un lugar central el control de las variables, consistente en realizar pruebas donde se varía sistemáticamente un factor, mientras los demás permanecen constantes.

Estos autores han asentido que, contrariamente a la suposición piagetiana y a la propia definición de pensamiento formal, el contenido de una tarea (y de un problema en particular) tiene una influencia decisiva en el proceso de resolución. Un adolescente puede razonar formalmente con respecto a un tema, pero no necesariamente con respecto a otro, todo en dependencia de sus expectativas e ideas previas sobre uno u otro.

Pozo y Carretero toman como ejemplo las dificultades que tienen los adolescentes, e inclusive los estudiantes universitarios, para desprenderse del supuesto de que la velocidad con que caen los cuerpos no depende de su peso. De la misma manera, tanto los niños como los adolescentes consideran generalmente que el peso influye mucho más que el volumen o que la densidad en la flotación de los cuerpos. En el próximo capítulo se abordará la problemática que originan los preconceptos en la RP. Especial interés se le prestará al papel que juegan las creencias y concepciones sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje.

Aquí culminan las consideraciones sobre el pensamiento convergente, el cual constituye premisa y antítesis de la creatividad humana. Para analizar la naturaleza del pensamiento divergente, es necesario conceptuar primero la noción misma de creatividad. En su acepción más común, la creatividad es la facultad de crear, lo cual es sinónimo de engendrar, instituir, imaginar, fundar, establecer, concebir, inventar, etcétera.

La creatividad es un proceso dinámico en constante evolución, que lleva en sí su origen y su meta. Resaltando la importancia que reviste para el desarrollo social, Vigotsky escribió: “Si la actividad del hombre se limitara a la producción de lo viejo, sería un ser volcado solo al pasado y sabría adaptarse al futuro únicamente en la medida en que reprodujera ese pasado. Es precisamente la actividad creadora del humano la que hace de él un ser proyectado hacia el futuro, un ser que crea y transforma su presente”.[196]

Desde mediados del siglo pasado se ha investigado la creatividad con el fin de combatir el misticismo con que socialmente se le veía. Se concluyó que a pesar de su carácter polifacético, en todos los procesos creativos se da una capacidad común: la de encontrar relaciones entre experiencias antes no relacionadas en forma de nuevos esquemas mentales, como experiencias, ideas o productos nuevos. Cada individuo posee un potencial creativo y puede aplicarlo en mayor o menor grado en cualquier situación vital. La creatividad individual es de capital importancia para el

[196] Vigotsky, L. S. (1930/1987) *Imaginación y creación en la edad infantil*. La Habana: Pueblo y Educación, p. 25.

desarrollo del individuo, a la vez que constituye un presupuesto previo para la creatividad social y el desarrollo cultural.

La creatividad no se evidencia *per se*, sino a través de sus manifestaciones. Tiene su génesis en los procesos cognitivos, hasta reflejarse con relativa estabilidad en el plano conductual. Es una actitud ante la vida, donde subyacen elementos como la inconformidad de aceptar las cosas como son, combinándolas con una mente abierta y flexible, con la disposición y voluntad de concebirlas de otra manera. Por este motivo, la creatividad no es una cualidad especial constreñida exclusivamente al proceso de RP, pues la sola visión de un problema es ya un acto creativo.

Existen disímiles definiciones y caracterizaciones que intentan aproximarse al concepto de creatividad. Desde una perspectiva bastante integradora A. Mitjáns plantea que la creatividad es “el proceso de descubrimiento o producción de algo nuevo que cumple exigencias de una determinada situación social, proceso que, además tiene un carácter personológico”. La autora reconoce que el aparato conceptual de la psicología no permite aún dar una definición acabada de este concepto, afirmando que “se irá enriqueciendo y precisando a partir de los resultados de la investigación y la práctica pedagógica”.[197]

La creatividad ha sido estudiada desde diferentes ángulos; mientras unos ponen especial atención en el proceso, otros lo hacen en el producto creativo o en la personalidad. J. P. Guilford[198] en sus estudios hizo una distinción entre los rasgos y facultades de la personalidad creativa. Para él los rasgos son relativamente permanentes, mientras que las facultades expresan la disposición de una persona para aprender ciertas cosas. Esta aptitud puede ser innata y puede estar determinada por la influencia del entorno, o bien por una interacción entre ambas realidades. A. Bowd, D. McDougall y C. Yewchuk[199] destacan los rasgos y facultades siguientes:

a) Fluidez: capacidad para producir muchas respuestas ante una pregunta de fin abierto (open–ended question, cf. la figura 8) o problema.

b) Flexibilidad: capacidad para generar ideas no convencionales, o para ver situaciones desde diferentes perspectivas.

c) Originalidad: capacidad para producir respuestas únicas, novedosas e inusuales, de gran interés para cierto grupo.

d) Elaboración: capacidad para planear detalladamente una idea, para enriquecerla e implementarla.

e) Visualización: capacidad para imaginar y manipular mentalmente imágenes e ideas, hasta enfocarlas desde diferentes perspectivas internas y externas.

f) Transformación: capacidad para cambiar una cosa o idea en otra, descubriendo nuevos significados, aplicaciones e implicaciones.

---

[197] Mitjáns, A. (1995) *Creatividad, personalidad y educación*. La Habana: Pueblo y Educación, p. 35.
[198] Guilford, J. P. (1959) Traits of creativity. In: H. H. Anderson (Ed.) *Creativity and its cultivations* (pp. 142–161). Harper.
[199] Bowd, A., McDougall, D. and Yewchuck, C. (1994) *Educational psychology for Canadian teachers*. Toronto: Harcourt, Brance and Company.

g) Intuición: capacidad para ver relaciones o establecer conexiones, sobre la base de informaciones parciales.

h) Síntesis: capacidad para cambiar las partes en un todo coherente.

Los autores que enfocan la creatividad como “proceso”, suelen enfatizarla como proceso de RP. El individuo trabaja con las informaciones que posee, aplica experiencias anteriores y las combina con estructuras nuevas que puedan solucionar el problema. Un ejemplo de etapas claramente distinguibles del acto creativo ya fue analizado en el § 1.4, relacionado con el “insight” poincareano.

Finalmente, el enfoque de “producto” enfatiza el hecho de que el resultado creativo tiene que ser nuevo (ora para la cultura, ora para el mundo experimental del individuo), así como la necesidad de adecuarse a la realidad y poseer un amplio campo de aplicación. En este caso, el propio Guilford hace una distinción entre productos palpables y reconocidos por la cultura, y productos psicológicos no palpables, que son ideas explícitas o simplemente actividad de pensamiento.[200]

Uno de los aspectos más debatidos en materia de creatividad consiste en la necesidad de estimularla y desarrollarla. La literatura relaciona decenas de técnicas para lograr estos fines. Entre ellas figuran los mapas conceptuales, el arte de preguntar, el listado de atributos, la solución creativa de problemas, el pensamiento mediante imágenes, asociación forzada, el análisis morfológico, la técnica de Da Vinci, entre otros muchos[201]. Sin embargo, no todos son aplicables al ámbito escolar, y mucho menos al campo de la RP.

Antes de establecer su punto de vista sobre la necesidad de reevaluar la concepción tradicionalista de la creatividad en la escuela, Mitjáns parte de dos aspectos esenciales. Por una parte, la creatividad no es aplicable solo en función de operaciones cognitivas, sino también de otros elementos como la motivación y la personalidad. Por otra parte, sin que se pueda establecer ningún perfil único que caracterice a las personas creativas, se revelan con fuerza algunos elementos psicológicos que parecen estar fuertemente asociados al comportamiento creativo. Entre estos últimos relaciona la motivación, las capacidades cognitivas, la apertura a la experiencia, la independencia, la flexibilidad y la confianza en sí mismo. Mitjáns puntualiza que “muchos de estos elementos no constituyen simples cualidades o rasgos de personalidad en el sentido más tradicional, sino que pueden ser conceptualizados como formaciones complejas e indicadores funcionales de la personalidad que se integran en configuraciones individualizadas, jugando un rol esencial en la regulación del comportamiento creativo”.[202]

Esta autora critica el hecho de que la estimulación y desarrollo de la creatividad no se consigna en los objetivos de la mayoría de los currículos escolares Por otra parte, destaca que los elementos esenciales del sistema actividad–comunicación, favorecedor de la creatividad en las instituciones escolares son los siguientes:

[200] Cf. Mitjáns, Ibíd., pp. 35–36.
[201] Véase http://www.neuronilla.com/pags/tecnicas/default.asp.
[202] Ibíd., pp. 24–25.

a) Diseño de un sistema de actividades dirigido no solo a la apropiación de conocimientos y estrategias de acción cognitiva, sino también al desarrollo de recursos personológicos esenciales.

b) Carácter productivo (y no reproductivo) de las actividades que se le pide realizar al alumno. Estructuración de la enseñanza en forma de descubrimiento y solución creativa de problemas.

c) Carácter múltiple y heterogéneo del conjunto de actividades que la institución escolar ofrece, unido a la posibilidad de que el alumno tenga opciones de selección individualizadas.

d) Complejidad creciente, de acuerdo al grado escolar, de las actividades que se conciben, eliminando los elementos rutinarios y estereotipados.

e) Dosificación coherente de las actividades docentes y extradocentes, de forma que el alumno disponga de tiempo real para adentrarse con profundidad en las esferas en que va desarrollando intereses.[203]

A continuación, Mitjáns aborda la necesidad de implicar al estudiante en su propio proceso de aprendizaje. Destaca la necesidad de que el rol del maestro sea el de un agente facilitador, pero además creativo. También sugiere valorar y estimular adecuadamente los logros del estudiante, alentando el proceso de ensayo–error sin estigmatizar este último. Mitjáns llega aún más lejos y propone reanalizar todos los componentes del proceso docente–educativo, partiendo desde los propios objetivos, así como una reconcepción del currículo y de la organización escolar.

Otro elemento a considerar durante el análisis de la resolución creativa de problemas, consiste en medir el grado o nivel de creatividad. Un camino viable puede seguirse a partir de la evaluación de los rasgos y facultades enumerados por Bowd, McDougall y Yewchuck. En este caso es necesario establecer indicadores o parámetros de evaluación. Por ejemplo, el grado de elaboración puede ser medido a partir de indicadores tales como la determinación, disciplina, persistencia, perfeccionamiento, orientación y dedicación.

De acuerdo con J. Panagos[204] para medir la creatividad hay que considerar el dominio, la magnitud y el énfasis teórico. A diferencia del párrafo anterior aquí no se enfatiza la personalidad, sino el proceso y el resultado. Desde esta perspectiva se comprende que la creatividad no existe como un evento generalizable a toda la actividad de un individuo. Es por ello que hay que considerar el dominio y su naturaleza epistemológica. Por ejemplo, un sujeto puede ser más o menos creativo en diferentes campos de la Matemática, y como consecuencia en los correspondientes procesos de RP.

En relación a la magnitud del resultado creativo, queda claro que plantear y resolver problemas cotidianos puede no ser lo mismo que hacerlo en situaciones de

---

[203] Ibíd., pp. 117–118.

[204] Panagos, J. (2005) *Creatividad y modelo holodimérgico*. Ponencia presentada en el IV Coloquio de Psicología Transpersonal. Universidad de las Américas, Puebla. Disponible en http://homepage.mac.com/penagoscorzo/creatividad_coloquio_transpersonal.pdf. Cf. Mitjáns, Ibíd., capítulo 3, pp. 84–102.

repercusión para la humanidad. Respecto al énfasis teórico, la resolución creativa de problemas matemáticos encuentra aplicación tanto en el proceso como en el producto. En general, una visión holística del proceso de evaluación, sugiere tomar como dimensiones fundamentales la propia personalidad, el proceso y el resultado creativo, caracterizados a través de sus indicadores.

Enfocando esta problemática desde la teoría triárquica de Sternberg, se comprende que el proceso de evaluación de la inteligencia será todavía más complejo. Un primer intento lo constituyeron los test para medir el coeficiente de inteligencia (CI). Se trata de una medida, obtenida a partir de la división de la edad mental (EM) por la edad cronológica (EC). Para evitar la utilización de números no enteros, se sigue la pauta de multiplicar el cociente resultante por 100. La fórmula será, por lo tanto la siguiente: CI = EM/EC x 100.

La medición del CI ha partido de la aplicación de test que enfatizan la inteligencia académica, marginando otras dimensiones importantes en el sentido de Sternberg. Como puede apreciarse, todavía queda mucho por hacer. El propio Sternberg ha desarrollado una herramienta para medir la inteligencia, la cual se apoya en su teoría triárquica; se trata del STAT (Sternberg Triarchic Abilities Tests).[205]

§ 3.4 La Enseñanza Problémica de la Matemática

Examinando el origen psicológico, filosófico y pedagógico de las principales didácticas cubanas de la Matemática, Torres ha observado la existencia de tres enfoques bien diferenciados.[206] El primero de ellos se basa en los trabajos de F. Muñoz y enfatiza los sistemas de ejercicios, cuya unidad conlleva al cumplimiento de las funciones didácticas de esta asignatura.[207] Estas ideas subyacen en las tesis de los psicólogos rusos D. B. Elkonin, V. V. Davidov y Y. M. Koliaguin. En segundo lugar figuran los ya mencionados trabajos de H. Hernández, que enriquecen la concepción de N. G. Salmina sobre el enfoque sistémico de las asignaturas, así como la TFEAM de Galperin y la obra de Talízina.

Los dos enfoques anteriores enfatizan el carácter sistémico de la Matemática; sin embargo, el tercer enfoque resalta el carácter dialéctico de esta ciencia. Se trata de las primeras aportaciones de Torres, las cuales subyacen sobre trabajos relacionados con la aplicación de los métodos problémicos a la enseñanza de la Matemática, y tienen su origen en las obras de M. I. Majmutov y S. L Rubinstein. Este enfoque se denomina "Enseñanza Problémica" y no niega ni excluye los

[205] En este instrumento se combina cada dimensión de Sternberg con los modos de representación del contenido (verbal, numérico y figurativo). Se construyen ítems para medir nueve escalas posibles: la analítica–verbal, la analítica–cuantitativa, la analítica–figurativa, la práctica–verbal, y así sucesivamente. Véase, por ejemplo, Sternberg, R. J.; Prieto, Ma. D. y Castejón, J. L. (2000) Análisis factorial confirmatorio del Sternberg Triarchic Habilitéis Test (nivel–H) en una muestra española: resultados preliminares. *Psicothema*, 12 (4), 642–647.

[206] Véase Torres, 1996, Ibíd.

[207] Véase Muñoz, F. (1985) Ejercitación en la enseñanza de la Matemática. *Educación*, Vol. 58, pp. 39–49, La Habana.

caminos anteriores, sino que los enriquece y sistematiza en una teoría muy amplia. A continuación, tomando como base las consideraciones filosóficas e históricas ya realizadas, se analizará este tipo de enseñanza.

A pesar de que el foco principal de este libro se enmarca en el proceso de RP, no es recomendable una abstracción tal que lo sitúe fuera del ambiente donde tiene lugar. La literatura ha denominado este ambiente de muchas maneras, pero las más aceptadas se refieren a dos procesos sumamente complejos: el docente–educativo y el de enseñanza–aprendizaje. Es usual la consideración de ambos macroprocesos, incluyendo uno como subconjunto del otro. A decir verdad, tal intento no tiene caso, pues el aprendizaje puede darse fuera del ámbito docente y lo educativo va más allá de la simple enseñanza. De todas formas, conviene tomar del primero su naturaleza pedagógica, para referirse a la formación integral del estudiante; mientras, la naturaleza psicológica del segundo designaría una compleja actividad cognitiva.

El asunto que ahora ocupa, se enmarca en las fronteras de lo pedagógico y lo psicológico. En efecto, es necesario exponer las bases teóricas que fundamentan la formación y desarrollo del proceso de RP dentro del contexto escolar. Son muchos los enfoques que podrían seguirse, cada uno con presupuestos pedagógicos, psicológicos y filosóficos propios. De esta manera, queda planteado el dilema de elegir uno de los siguientes caminos: asumir un enfoque, tomar partido de varios de ellos, o erigir un enfoque nuevo. Cualquier elección a priori corre el peligro de ser subjetiva. Las raíces de cada corriente son tantas, y se entrecruzan de tal manera, que la primera opción puede conducir al dogmatismo, la segunda al eclecticismo, y la tercera al positivismo. No obstante, cualquier elección conducirá a la verdad, siempre y cuando el análisis se apoye en las doctrinas del materialismo dialéctico.

Seguir una teoría exige asumirla perfectible; tomar de varias presupone ser consecuente con bases epistemológicas sólidas, para desechar lo negativo de cada una; mientras que erigir una nueva constituye un reto y exige fundamentar su razón de ser. Aunque el fin de esta obra se aproxima a la tercera variante, en el presente epígrafe se adoptará el primer camino. Por tanto, se asume la Enseñanza Problémica de la Matemática como base esencial para el desarrollo de la RP[208]; reconociendo la posibilidad y necesidad de enriquecerla constantemente. Según Torres, esta enseñanza es "aquella donde los alumnos son situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución debe realizarse con su activa participación, y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado sino, además, su *capacitación independiente para la resolución de problemas en general*".[209]

---

[208] Frecuentemente algunos autores se adhieren tácitamente a algún modelo o teoría de aprendizaje. Así, pueden encontrarse seguidores del modelo introducido por los esposos Dina y Pierre Van Hiele para la enseñanza de la Geometría, o de la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner. A título de ejemplo véase, respectivamente, Estrada, M. R. (1997) *Modelo didáctico dirigido a desarrollar el procedimiento lógico de demostración*. Tesis de Maestría no publicada, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín; y Rivera, Ma. A. (1999) *El efecto de un modelo basado en la Teoría de las Inteligencias Múltiples en la solución de problemas matemáticos*. Ponencia presentada en el evento Relme 13, Santo Domingo.

[209] Torres, Ibíd., 1996, p. 5 (sin itálicas).

El estudio integral del proceso de RP reconoce la intervención de tres variables independientes profundamente interrelacionadas: el *sujeto* que resuelve la tarea, la *tarea***,** y el *ambiente* en el cual el sujeto resuelve la tarea. Los eventos de resolución de problemas terminan con un *producto*, el cual es conclusión explícita de una serie de *subprocesos* llevados a cabo por el sujeto de manera consciente o inconsciente. Tanto los subprocesos como el producto son variables dependientes de las anteriores. La figura 18 representa uno modelo propuesto por D' Amore y Zan, que expresa las principales correlaciones que se establecen entre estas variables, reflejando el papel esencial que juega el ambiente en la RP.[210]

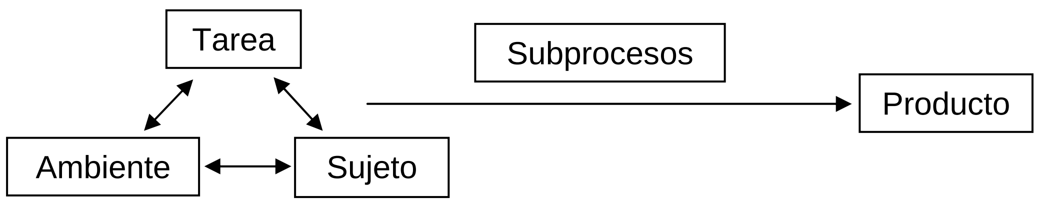

Figura 18. *Variables generales del proceso de resolución de problemas*

Cada una de estas variables está compuesta por una pluralidad de variables más simples. Por ejemplo, en el sujeto pueden ser reconocidas ciertas variables orgánicas que no son susceptibles al cambio (como el sexo y la edad) junto a otras que pueden ser modificadas por procesos tales como la enseñanza (estilos cognitivos, interés, creencias, valores, etcétera). En el caso de la tarea, otras variables describen sus características más significativas, como el contenido (referido a los significados matemáticos), el contexto (referido a los significados extramatemáticos), la sintaxis (que describe los arreglos simbólicos y las complicaciones lógico–lingüísticas) y la estructura (referida a las interrelaciones matemáticas entre los elementos del problema).

Por su parte, el ambiente bajo el cual el sujeto resuelve la tarea no intenta describir la tarea o el sujeto, sino que es externo a ambos. Así, esta variable describe las condiciones físicas, pedagógicas y sociales, en las cuales el evento de resolver problemas toma lugar. Las variables que le son constitutivas incluyen la preparación del maestro, el método de enseñanza, los medios, el currículo, etcétera. Los subprocesos envuelven variables relacionadas con la actuación del individuo durante la resolución de problemas, como los procedimientos heurísticos, los bloqueos experimentados, las técnicas y la metacognición. Finalmente, en vista de que el producto apunta hacia la realización de la solución, subsisten variables afines a este como el tiempo, la corrección o incorrección de la solución, su elegancia, entre otras.

En general, la atención de los investigadores se enfoca sobre una de las variables independientes, estudiando cómo varía el producto o los subprocesos. Otros estudios giran en torno a la interrelación entre las variables independientes, como es

[210] D'Amore, B. & Zan, R. (1996) Italian research on problem solving 1988–1995. In A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.): *Didactic and History of Mathematics* (p. 39). Thessaloniki.

el caso de la influencia que tienen ciertos tipos de problemas en las creencias y concepciones del sujeto. Sin embargo, es objetivamente imposible abordar cada una en su plenitud, ni siquiera una sola por separado admitiría tal análisis, pues el proceso enseñanza–aprendizaje tiene una naturaleza muy compleja.[211]

La Enseñanza Problémica expresa la dinámica de la interacción del ambiente con las demás variables; permitiendo descubrir las relaciones esenciales y los senderos más efectivos para potenciar el aprendizaje de la RP. La Enseñanza Problémica no es un conjunto de métodos de enseñanza, sino un sistema de enseñanza que remonta sus orígenes a los trabajos de I. Ya. Lerner, M. N. Skatkin y M. I. Majmutov. Todos ellos criticaron la enseñanza tradicional afianzada en las décadas de los años 60 y 70. Como ya se analizó en el capítulo 1, los alumnos jugaban el papel pasivo de simples receptores. Recibían los conocimientos ya elaborados, no se les facilitaba la comprensión de los conocimientos, o bien ignoraban el origen de los mismos. Aunque en algunos lugares no ha cambiado mucho, en términos de P. Freyre, se trataba de una “pedagogía bancaria”.

Particularmente, Mirza I. Majmutov partió de concebir al alumno como un ente activo en la clase, planteando la necesidad de que asimile los métodos y procedimientos para la búsqueda del saber científico. El objetivo fundamental se enmarca en que el alumno transite, de manera abreviada e inteligible, por senderos similares a los que experimentaron los conocimientos de las ciencias. En este tránsito el sujeto no sólo se apropia activamente del conocimiento, sino de la lógica de la ciencia en cuestión en la solución de un problema determinado.

Para lograr lo anterior, Majmutov parte de no brindar el conocimiento ya elaborado, sino que el docente refleje las contradicciones del fenómeno que se estudia, en forma de problema, motivando a los estudiantes por darle solución a través de métodos y razonamientos científicos. Para este autor, Enseñanza Problémica es un sistema didáctico basado en regularidades de la asimilación creadora de los conocimientos, capaz de integrar diferentes métodos de enseñanza y aprendizaje, los cuales se caracterizan por presentar rasgos básicos de la búsqueda científica. La asimilación de los conocimientos debe ir más allá de la simple memorización del material docente, para llegar a la elaboración lógica de los mismos. Así, no solo se desarrolla la memoria, sino las diferentes habilidades y capacidades del estudiante.

Con el objetivo de elucidar los presupuestos teóricos de la Enseñanza Problémica, es sugerente partir de una idea de Schroeder y Lester, los cuales relacionan la enseñanza con la resolución de problemas, a través de las preposiciones inglesas *for*, *about* y *through*.[212] La enseñanza “para” resolver problemas se asocia al modelo estímulo–respuesta, donde las habilidades se “adquieren” a través de la reiterada resolución de una serie de ejercicios interconectados. El fin consiste en que el estudiante pueda ser capaz de aplicar las técnicas memorizadas ante ciertas situaciones, donde algunas características específicas (estímulo) provocan

[211] Véase Schoenfeld, A. H. (2000) *Purposes and methods of researching mathematics education*. University of California, Berkeley.

[212] Schroeder, T. L. & Lester, Jr., F. K. (1989) Developing understanding in mathematics via problem–solving. In: *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31–42), 1989 Yearbook NCTM, Reston.

conductas específicas (respuesta). De esta manera, la actividad cognoscitiva del sujeto se interpreta como la simple suma de sus partes. Así, un enunciado podría ser: "Use la división para resolver los siguientes ejercicios…".

Tal y como se expuso en el § 1.4, la práctica escolar se encargó muy pronto de poner al descubierto la inconsistencia de este modelo conductista, el cual debió ceder terreno curricular (más que en la práctica pedagógica) a una nueva fórmula: la enseñanza "sobre" la resolución de problemas. La génesis de este segundo modelo es la teoría del procesamiento de la información. Para sus seguidores operar en el nivel semántico es posible sólo desde un nivel simbólico, por tanto, el contenido semántico de la cognición se reduce a la codificación de expresiones simbólicas. Los estudiantes no son educados para descubrir los métodos por sí mismos, sino conducidos por el maestro hacia la respuesta correcta. Un papel esencial juega la organización y estructura del conocimiento, así como la velocidad, exactitud y tersura de la acción. La enseñanza, en su algoritmo exposición–ejemplo–ejercicio–problema, enfatiza saber qué y cómo, detectando errores y remediándolos, pero pasando por alto el por qué y el para qué.[213]

Particularmente, la resolución de problemas se interpreta como un proceso racional y significativo, que se apoya en una entrenada memoria de trabajo y esta, a su vez, en la memoria a largo plazo. A pesar de todo, este enfoque facilita la adquisición de nuevas experiencias por parte de los estudiantes, así como discusiones explícitas de lo que la Matemática es, y no sólo se enmarca en el sentido estrecho de la ejecución.

Sobre la base de muchos resultados, provenientes de diversos campos del saber humano (pedagogía, psicología, inteligencia artificial, antropología, neurofisiología, lingüística y filosofía), se ha elaborado un tercer paradigma: la enseñanza "a través" de la resolución de problemas. Aquí el propósito no reside en formar un imitador (enfoque "para") ni un procesador (enfoque "sobre"), sino un pensador activo.

Wyndhamn ha propuesto un esquema (véase la figura 19)[214], donde las etapas B y E sirven de puente entre las situaciones problémicas y la actividad matemática. El primer enfoque enfatiza la relación 3 y el segundo el ciclo B–C–D–E–B, sin embargo, el tercer enfoque se expresa por todo el diagrama. En efecto, ante una situación problémica el estudiante debe, por medio de la abstracción, simplificar la información y determinar lo esencial (lo dado y lo buscado), a fin de formular el problema con suficiente rigor (1).

A continuación se procede a matematizar la información, traduciéndola al lenguaje simbólico, para luego obtener el modelo matemático del problema (2). Por medio de operaciones, transformaciones, haciendo uso de técnicas y teorías, se llega a la solución (3), la cual debe ser analizada y comprendida con el objetivo de interpretarla (4). La primera interpretación es intramatemática, en ella el individuo

---

[213] Véase Nápoles, J. E. y Cruz, M. (2000) La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Educação Matemática em Revista*, Año 2, No. 2. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - RS, Brasil.

[214] Wyndhamn, Ibíd., p. 22. En el gráfico original este autor hace distinción entre los mundos objetivo y subjetivo. Aquí ha sido eliminada esta dicotomía y se asume esencialmente el mundo real.

traduce sus resultados, chequea la solución, elabora predicciones, generalizaciones y conclusiones (5); la segunda es extramatemática, pues se compara lo obtenido a fin de analizar la validez del resultado (6).

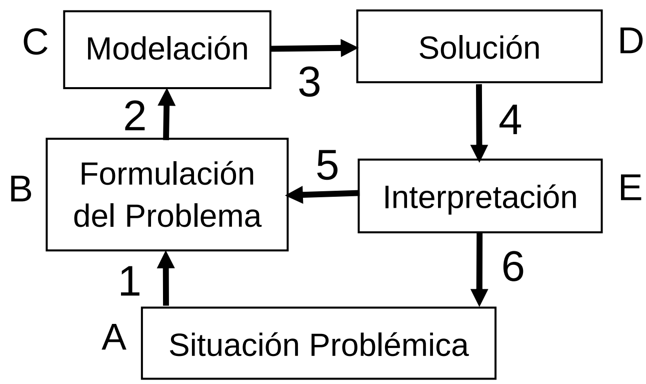

Figura 19. *Un modelo general del proceso de resolución de problemas*

Estas ideas alentadoras, bien podrían aparentar que la Enseñanza Problémica es la enseñanza “a través” de la RP; sin embargo esto no es así. Esta última se limita a establecer las raíces epistemológicas, tomando como base una posición filosófica sólida, donde la Matemática es vista como una actividad humana que enfatiza la RP. La Enseñanza Problémica es una perspectiva pedagógica sistémica, equipada de leyes y categorías, de manera que establece cuándo y cómo aplicar los métodos problémicos. Esto indica que, si bien el énfasis subyace sobre el tercer tipo de enseñanza, se admite la eventual manifestación de los modelos “para” y “sobre” en determinados momentos del proceso docente–educativo.

Las leyes de este sistema de enseñanza reconocen los principales aportes de la psicología cognitiva, en materia de aprendizaje. Se admite, en primer lugar, que el aprendizaje es un proceso interno que se exterioriza de manera oportuna y sistemática, que es cualitativamente humano y básico para el desarrollo del hombre. El aprendizaje es intencional, pues una condición necesaria para aprender es querer hacerlo. No existen mecanismos universales de aprendizaje, por el contrario, es necesario reconocer la presencia de estilos de aprendizaje.

Algunos investigadores defienden explícitamente estas ideas, sin embargo, no son consecuentes con ellas y hierran al promulgar esquemas de enseñanza. Por ejemplo, algunos colegas cubanos han propuesto que en cada clase de Matemática se incluya un problema. Esto es un arquetipo de dogmatismo. El qué determina el cómo a través del objetivo. En ocasiones no es posible y hay que consagrar la clase a la resolución de sistemas de ejercicios, cuyo propósito reside en desarrollar ciertas habilidades, fijar ciertos conocimientos, etcétera.

Por otra parte, el aprendizaje tiene un carácter activo, manifiesta la unidad de la esfera cognitivo–afectiva, y está dirigido por el maestro. Hoy, sin embargo, algunos arguyen que es posible enseñar con el apoyo exclusivo de ciertos medios electrónicos. Esta es la nueva versión de la desacertada enseñanza programada, de la cual ya se comentó su triste derrotero. Buscar apoyo en el vídeo y en las nuevas tecnologías informáticas es imprescindible en tiempos de Internet, pero nada es equiparable al poder que ejerce en los estudiantes la noble acción pedagógica del maestro.[215]

Junto a las leyes, el análisis del sistema categorial contribuye a esclarecer los rasgos que diferencian la Enseñanza Problémica de otras formas de enseñanza. En primer lugar, la "situación problémica" es su categoría más importante (cf. figura 19, etapa A), pues refleja la contradicción dialéctica entre lo conocido y lo desconocido, entre el sujeto y el objeto; y estimula la actividad cognoscitiva al desencadenar el proceso de resolución. De esta manera, se eleva el grado de actividad mental en la clase, se propicia el pensamiento creador, y se contribuye al desarrollo de la personalidad de los estudiantes.

En estrecho vínculo con la situación problémica está la categoría "problema docente". En este caso, sale a colación la naturaleza pedagógica del concepto problema, tal y como se vio en el § 3.2. Algunos autores asumen "lo problémico" como categoría. Aquí, por el contrario, se entenderá que "lo problémico" es un atributo de la categoría "situación problémica", la cual revela el grado de complejidad que entraña dicha situación. En el capítulo 5 este aspecto será tratado, dentro del ámbito de la formulación de problemas.

Particularmente, en este tipo de enseñanza, dicho problema puede ser resuelto con la ayuda de sistemas de tareas. La categoría "tarea problémica" desencadena una actividad conducente a encontrar lo buscado, a partir de la contradicción que surgió durante la formación de la situación problémica reveladora de la contradicción. En el proceso de realización de las tareas problémicas resulta muy útil el empleo de impulsos heurísticos, por parte del profesor. Un componente estructural de la tarea, capaz de estimular el pensamiento es la "pregunta problémica". En el próximo capítulo se examinará con más detalle el papel que juegan en la RP estas preguntas, los impulsos heurísticos, y los sistemas de tareas en sentido general.

Por otra parte figuran los "métodos problémicos". Estos últimos son una cualidad de la escuela de excelencia, y se caracterizan como la serie de acciones y modos de conducta del profesor, dirigidos hacia el cumplimiento de los objetivos a niveles productivo y creativo. Estos métodos pueden agruparse siguiendo una clasificación tricotómica. En primer lugar figura la "exposición problémica", donde el papel fundamental lo juega el maestro cuando familiariza al alumno con la solución de los problemas que se plantean en la clase, y con la lógica contradictoria de la búsqueda de soluciones.

En segundo lugar figura la "búsqueda parcial", donde el grado de participación es equitativo. Aquí el maestro procura elevar la actividad cognitiva de sus estudiantes sobre la base de un enfoque problémico y con la activa participación de estos. Una de las manifestaciones de este método es la conversación heurística, donde se establece un diálogo entre el profesor y el alumno, a partir de preguntas e impulsos

[215] Para un estudio más detallado de las leyes y principios, véase Ortiz, E. y Mariño, M. (1995) *Los principios para la dirección del proceso pedagógico*. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

dirigidos hacia la ZDP. En tercer lugar aparece el “método investigativo”, donde el maestro organiza el proceso de aprendizaje problémico de manera que el estudiante atraviese con relativa independencia todas o la mayoría de las fases del proceso investigativo.

Como se ha observado, los grados de participación del profesor y el alumno varían según el método. Sin embargo, en todos los casos, el alumno constituye el centro de un proceso dirigido por el maestro. Torres determinó varios criterios de selección y aplicación efectiva de los métodos anteriores en la enseñanza de la Matemática.[216] Este autor responde a la pregunta de cuándo utilizarlos, considerando los siguientes criterios de selección:

f) Determinar los contenidos que demandan una mayor utilización de formas de pensamiento no algorítmicas, dando preferencia a aquellos para los cuales se exigen los niveles de asimilación productivo y creativo.

g) Considerar factores como el nivel de preparación de los alumnos, el tiempo disponible y las condiciones organizativas y materiales de la institución.

h) Decidir el método problémico más apropiado de acuerdo con el nivel de relación con los contenidos precedentes y el desarrollo cognitivo de los educandos.

Por su parte, ante la pregunta de cómo utilizar los métodos problémicos, Torres propone como criterios de aplicación los siguientes:

a) Partir de la elaboración de una situación problémica, mediante la revelación de las contradicciones que resultan de una ampliación intramatemática o de una extensión extramatemática (aplicación a otra ciencia o a la vida práctica).

b) Contribuir a la transformación de la situación problémica en problema, a través de una adecuada orientación hacia el objetivo, donde se ponga claramente de manifiesto: ¿qué se quiere lograr?, ¿de qué condiciones se parte?, y ¿por qué vía general se resolverá el problema?.

c) Conducir el proceso de resolución a través de tareas y preguntas problémicas adecuadas, sobre la base del empleo racional y eficiente de los procedimientos heurísticos que permitan concretar los medios y la vía de solución.

d) Formular tareas cuyo proceso de solución se dirijan hacia la ZDP. Las dificultades que estas exigencias le plantean al alumno deben ser superadas en la medida en que sea necesario, con la ayuda del profesor, mediante el empleo de impulsos cada vez menos exigentes. En todo momento se aprovecharán las potencialidades del contenido para acentuar la contradicción original, controlando sistemáticamente el objetivo a cumplir.

En consonancia con el modelo de Wyndhamn, el segundo criterio se refiere al paso 1 (en la figura 19), mientras los dos siguientes se refieren al proceso 2–3–4 con los controles 5 y 6. Sin embargo, es necesario señalar la necesidad de hacer explícito un quinto criterio, relativo a la peculiaridad de que todo problema es el punto de

[216] Torres, P. (1993) *La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general*. Tesis doctoral no publicada, ISP “Enrique José Varona”, La Habana.

partida para un virtual campo de problemas.[217] Es por ello que debe añadirse un quinto criterio, el cual consiste en:

e) Determinar qué nuevos problemas resultan convenientes explorar de manera perspectiva o retrospectiva, previendo la creación de condiciones para que estos emerjan tras nuevas situaciones problémicas.

La Enseñanza Problémica tiene muchos detractores. Este hecho es natural si se tiene en cuenta que no es aplicable de facto en cualquier momento del proceso docente–educativo. Por otra parte, su naturaleza epistemológica la hace apropiada para la enseñanza de las ciencias exactas. Así, es relativamente difícil enfatizar la Enseñanza Problémica en las ciencias naturales, y mucho más en las humanísticas.

Una crítica usual consiste en que ocupa mucho tiempo. Esto esconde una visión pragmática y trivializada de este sistema de enseñanza. Los criterios aportados por Torres revelan cuan flexibles son sus métodos. No obstante, la crítica advierte la posibilidad eventual de utilizar desacertadamente tales métodos. Torres, en varios trabajos ha señalado que la puesta en práctica de la Enseñanza Problémica requiere del conocimiento por el profesor, no solo de los resultados que habrá de alcanzar sino además, de las condiciones en que deberá trabajar. Ellas son las siguientes:

a) Se necesita más tiempo para la preparación de la clase que cuando esta última se planifica sobre la base exclusiva de métodos no problémicos.

b) Para el desarrollo de un mismo contenido, consume más tiempo de la clase durante la familiarización de los alumnos con ella que la enseñanza explicativo–ilustrativa.

c) En general, sus ventajas sobre la enseñanza tradicional no se evidencian a corto plazo.

§ 3.5 Consideraciones retrospectivas sobre los fundamentos teóricos

En este capítulo se han expuesto las bases epistemológicas, psicológicas y pedagógicas que permitirán abordar el proceso de RP. Se ha analizado la importancia que reviste el quehacer matemático, la naturaleza de los problemas, la formación y desarrollo de las habilidades y capacidades, así como el tipo de enseñanza más adecuado. La plataforma teórica erigida servirá de base para un análisis cognitivo del proceso de RP. Ocurre, sin embargo, que en los últimos años algunos investigadores han realizado críticas muy interesantes, en relación al paradigma del pensamiento (del alumno o del profesor) dentro del campo de la DM.[218] Es, por tanto, conveniente finalizar este capítulo con algunas observaciones retrospectivas.

---

[217] Véase Chevallard et al., 1998, Ibíd.

[218] Es difícil comparar el enfoque que dimana de este capítulo con las corrientes actuales de enseñanza de la Matemática, las cuales son bastante numerosas. Una lectura obligada recae sobre la monografía *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición* matemática, de J. D. Godino (recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/). Se recomienda al lector que también confronte los

Ante todo, es necesario poner al descubierto los puntos de vista que han motivado estas críticas. En el primer capítulo ya se había hecho alusión a las obras de los franceses Guy Brousseau e Yves Chevallard. El primero de ellos considera, como enfoque "clásico", aquel que toma como centro la actividad cognitiva del sujeto, y que presupone que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos didácticos.[219] Estos últimos ya habían aparecido en la década de los años 70 y ampliaron inesperadamente la problemática didáctica, debido principalmente a la inclusión del "conocimiento matemático" como objeto primario de investigación. Desde entonces, se habla de dos enfoques clásicos (en un sentido no peyorativo): el aprendizaje del alumno y el pensamiento del profesor.

Los dos paradigmas "clásicos" sufrieron severas críticas. Por ejemplo, al tomar el pensamiento espontáneo del profesor como vía de acceso al análisis de su relación con el estudiante, se origina cierta confusión al solapar los conceptos "saber didáctico" y "saber necesario para enseñar". Un ejemplo paradigmático de confusión entre ambos tipos de saberes se da en la "investigación–acción".[220] Brousseau y sus seguidores critican el hecho de asumir acríticamente que, o bien los conocimientos matemáticos que se enseñan en la escuela no son problemáticos en sí mismos, o bien no forman parte de la problemática didáctica como los psicológicos, sociológicos y lingüísticos. Según ellos, los saberes provenientes de otras ciencias, que son aplicados por la DM para describir e interpretar sus hechos, nunca pueden ser modificados y ponen como ejemplo el concepto de "aprendizaje significativo" de Ausubel.

El trabajo fundamental de Brousseau se enmarca en su "Teoría de las Situaciones Didácticas", la cual es un arquetipo de positivismo. Su noción primaria subyace en el concepto de "situación matemática", de la cual se exige que pueda ser modelada a través de un juego formal. A partir de ella se definen los "conocimientos matemáticos" y las "variables" asociados a esta situación. Asimismo, introduce el concepto de "situación adidáctica" como situación específica de un conocimiento concreto tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador.[221] De esta manera, aprender un conocimiento matemático significa "adaptarse a una situación adidáctica específica de este conocimiento, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del jugador (el alumno) que le lleve a poner en práctica la estrategia ganadora u óptima de manera estable […]".[222]

---

siguientes enfoques: la "Matemática Educativa Crítica", elaborada por O. Skovsmose en 1994; la "Teoría de Procesos y Sistemas Genéricos" de C. E. Vasco; y la "Perspectiva Fenomenológica", de M. A. Viggiani–Bicudo. Conferencias magistrales de estos autores, relativas a sus respectivas teorías, aparecen en C. Alsina et al. (1998, Eds.) *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. SAEM "Thales", Sevilla; p. 153, 413, 443, 463 y ss.

[219] Véase Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33–115.

[220] Véase Brousseau, G. (1989) *La tour de Babel*. IREM, Université de Bordeaux I.

[221] Véase Brousseau, G. (1972) Processus de matématisation. *La mathématique à l'ecole élémentaire*, pp. 428–442, APMEP, Paris. Cf. Chevallard, Bosch y Gascón, Ibíd., pp. 213–226.

[222] Brousseau, 1986, Ibíd., p. 216.

La situación adidáctica es únicamente una parte de cierta situación más amplia que Brousseau llama “situación didáctica” específica de un conocimiento matemático. Esta última comprende las relaciones establecidas explícita e implícitamente entre los alumnos y el profesor en un cierto medio (*milieu*, que incluye objetos e instrumentos), con el objetivo de que los alumnos aprendan cierto conocimiento. La situación didáctica comprende una serie de intervenciones (“devoluciones” e “institucionalizaciones”) del profesor sobre el par medio–alumno,[223] destinadas a hacer funcionar las situaciones adidácticas y el aprendizaje que ellas provocan.

Así, enseñar un conocimiento matemático consiste en “hacer una devolución al alumno de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento”,[224] la cual puede modelarse como un proceso que se realiza dentro de la negociación de un contrato denominado “contrato didáctico”. Para ello el profesor comunica (o se abstiene de comunicar) informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etcétera. El profesor está, por tanto, implicado en el juego con el sistema de interacción del alumno con los problemas que él ha planteado.

Los defensores de esta corriente han descrito tres tipos de situaciones didácticas: de acción, de formulación y de validación. También promulgan la construcción de una didáctica superior a la “clásica” denominada “Didáctica Fundamental de la Matemática”, cuyo objeto primario sea el proceso de estudio de la Matemática. Este último transita por esos tipos de situaciones, enfrentando diferentes obstáculos epistemológicos.[225] Por su parte, en obras más recientes Brousseau ha definido la DM como “ciencia de las condiciones específicas de la adquisición provocada de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas”.[226]

Por la obra de toda la vida, en el año 2003 el ICMI otorgó a Guy Brousseau la primera medalla Félix Klein. Esta distinción reconoció su contribución “al desarrollo de la educación matemática como un campo de investigación científica, a través de su trabajo teórico y experimental de cuatro décadas, y el esfuerzo sustancial que ha hecho a través de su vida profesional para aplicar los frutos de su investigación a la educación matemática tanto de estudiantes como de profesores”.[227]

Por otra parte, los trabajos de Chevallard incorporan un enfoque antropológico de la DM, como “ampliación” de la epistemología tradicional de la Matemática. Todo fenómeno didáctico, según él, tiene un componente matemático esencial y viceversa; y no es posible separar el estudio de la génesis y desarrollo del conocimiento matemático del estudio de su respectiva enseñanza y aplicación. Desde esta perspectiva se erige la “Ingeniería Didáctica”, donde el enfoque antropológico proporciona instrumentos para analizar la estructura y funciones de los actuales dispositivos didácticos escolares. En varios trabajos sus seguidores han

[223] Cf. figura 17.
[224] Brousseau, Ibíd., p. 218.
[225] La noción de “obstáculo epistemológico” lo tomó Brousseau de la obra *La formation de l’espirit scientifique* (1938), del físico y filósofo de la ciencia francés G. Bachelard.
[226] Brousseau, G. (1994) Perspectives pour la didactique des Mathématiques. En M. Artigue et al. (Eds.) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France*. Paris: La Penseé Sauvage, pp. 51–66.
[227] Tomado de http://www.mathunion.org/ICMI/Awards/2003/BrousseauCitation.html.

observado limitaciones en dispositivos tales como "clase de Matemática", "clase teórica", "clase práctica", "libro de texto", "instrumento de evaluación", etcétera.

El aporte más importante de Chevallard reside en su teoría de la "Transposición Didáctica",[228] la cual va dirigida a interpretar la matemática escolar y la respectiva actividad matemática, teniendo en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de la Matemática, que se origina en la propia institución de producción del "saber sabio". Chevallard parte de que el sistema didáctico comprende una relación ternaria: docente–alumno–saber.[229] Así, el didacta de la Matemática se interesará por el "juego" que se realiza entre estos tres polos. También critica el hecho de que pocas veces se cuestiona el "saber enseñado", señalando que este sufre un grupo de "transformaciones adaptativas" antes de estar apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. Es precisamente este proceso de transformación del objeto de saber en objeto a enseñar y, finalmente, en objeto de enseñanza, lo que Chevallard denomina transposición didáctica.

Efectivamente, existe una mediación entre el conocimiento científico y el conocimiento a enseñar donde intervienen especialistas en diseño curricular, los cuales prescriben los contenidos a enseñar en el sistema educativo. Por otro lado, también existe una mediación entre el conocimiento a enseñar y el que realmente es enseñado. Aquí juegan un papel importante las editoriales, los autores de libros de texto, los diseñadores de software educativos, los maestros, etcétera. Todos con su propia visión, experiencias, creencias y concepciones sobre la Matemática, etcétera. No en balde, en el argot educativo, se esgrime con frecuencia que "cada maestro tiene su librito".

La transposición didáctica permite explicar el origen de los recursos mnemotécnicos, como la frase "todos somos trabajadores cubanos" para recordar el signo de las razones trigonométricas en cada cuadrante; dispositivos para abreviar algoritmos, como "la regla de tres"; gráficos para ilustrar relaciones, como los "diagramas de Venn" en la teoría de conjuntos; y versos para memorizar algunas cifras de π. Por ejemplo, las cantidades de letras, en las palabras de los siguientes versos de Manuel Golmayo, permiten reproducir el número π con veinte lugares decimales:

Soy y seré a todos definible;
mi nombre tengo que daros:
cociente diametral siempre inmedible
soy, de los redondos aros.

La puesta en práctica de los presupuestos teóricos de la transposición didáctica, constituye un reto para los sistemas educativos. En efecto, estudios realizados en materia de creencias y concepciones del maestro revelan la necesidad de un cambio en su actuación. La mayoría de los profesores no asimilan el papel protagónico que juegan en la transposición didáctica. Para ellos la Matemática es como siempre les ha parecido que es: el resultado de haberlas aprendido de una manera y haberlas enseñado luego de forma similar. El maestro teme que cualquier reforma, bajo su propia iniciativa, podría conllevarlo a errores de contenido.

[228] Véase Chevallard, 1991, Ibíd.
[229] Cf. nuevamente la figura 17.

Las ideas de Brousseau y Chevallard[230] han sido desarrolladas por varios seguidores españoles. Un caso emblemático lo constituye la obra de Josep Gascón, el cual ha tratado de reconstruir la génesis de la DM, interpretando el enfoque antropológico "como uno de los desarrollos naturales de la didáctica fundamental".[231] Este investigador defiende la necesidad de integrar el tradicional análisis cognitivo con el análisis de la obra matemática y sus respectivos obstáculos epistemológicos, y con el análisis de la reconstrucción escolar de dicha obra y su correspondiente proceso de estudio. Refiriéndose al enfoque "clásico", Gascón indica tres limitaciones fundamentales: [232]

a) A pesar de centrarse en la problemática de la enseñanza–aprendizaje de la Matemática, no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar Matemática" ni de "aprender Matemática", utilizándolas como nociones transparentes e incuestionables, o bien nociones construidas en otras disciplinas.

b) Al centrar el análisis en el alumno (o en el profesor en referencia al alumno), aborda su objeto de estudio con un fuerte condicionamiento psicológico, relegando a un segundo plano los fenómenos específicamente didáctico–matemáticos.

c) Al interpretar el saber didáctico como un saber técnico (importado de otras disciplinas), renuncia a la ambición de construir la DM como disciplina científica.

Gascón también señala que en el enfoque "clásico" ocurren una multitud de hechos "inexplicables" que han provocado un cambio de estatutos de ciertos objetos "paradidácticos" en didácticos. Pone varios ejemplos, entre los que se destacan "la aritmetización del álgebra escolar", "la algebrización del cálculo diferencial escolar", y "la irresponsabilidad matemática de los alumnos". Particularmente, este último ha sido explicado por el enfoque "clásico" en términos psicoafectivos y motivacionales, mientras que desde la óptica de la Didáctica Fundamental puede analizarse en términos del "contrato didáctico" y de la "devolución de una situación adidáctica".[233]

Según este autor, el enfoque "clásico" tampoco se interesa por analizar el papel que juegan las rutinas en el aprendizaje de la Matemática; el significado de aprender un determinado concepto; la relación entre el aprendizaje de la aritmética, el álgebra elemental y la geometría; y el papel que juega o podría jugar la actividad de RP en la enseñanza de la Matemática. Además, concluye que para tratar científicamente estas cuestiones es necesario disponer de:

a) un modelo explícito de la actividad matemática escolar (que incluya, por ejemplo, el "álgebra escolar"), y

---

[230] Pueden incluirse otros autores franceses como Michele Artigue. Véase, por ejemplo, Artigue, M. (1992) The importance and limits of epistemological work in Didactics. In W. Gleeslin & K. Graham (Eds.) *Proceedings of sixteenth meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, New Hampshire, Vol. 3, pp. 195–216.

[231] Gascón, J. (1998) Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), p. 9.

[232] Ibíd., pp. 12–14.

[233] Para más información consúltese Chevallard, Bosch y Gascón, *op. cit.*

b) un modelo del proceso escolar de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática (que contenga las nociones de “rutina matemática”, “actividad matemática creativa”, “resolución de problemas matemáticos”, etcétera, como nociones construidas en el modelo; o sea, no primitivas).

Una de las aportaciones más plausibles de Gascón ha consistido en el establecimiento de una tipología para identificar las principales corrientes, en el campo de la RP. Este autor describe siete paradigmas claramente identificables. Ellos son: Teoricista, Tecnicista, Modernista, Constructivista, Procedimental, de Modelización, y el de los Momentos Didácticos. Gascón deslinda los logros y deficiencias de cada uno, declarándose partidario del último de ellos.[234] El paradigma de los Momentos Didácticos se presenta como solución a todas las deficiencias de los anteriores.

La crítica más favorable respecto a los seis primeros paradigmas, apunta hacia la Modelización. En efecto, desde esta óptica los problemas solo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema; y la resolución exige una construcción explícita de un modelo del sistema subyacente. El objetivo consiste en la obtención de conocimientos sobre sistemas modelizados, tanto intra como extramatemáticos. Este paradigma describe cuatro estadios por los que atraviesa la actividad de modelación matemática. Se trata de (a) la situación problémica; (b) la delimitación del sistema subyacente a dicha situación y la elaboración del modelo matemático correspondiente; (c) el trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y de sus resultados dentro del sistema modelizado; y (d) la formulación de nuevos problemas. Como puede observarse, por su estructura formal, el paradigma de la Modelización tal y como lo describe Gascón guarda una marcada analogía respecto a la figura 19. Esto conduce al establecimiento de cierto paralelo entre dicho paradigma y la Enseñanza Problémica, como se verá más adelante.

El paradigma de la Modelización engloba al Constructivista, puesto que se utiliza la RP con el objetivo de que el alumno “construya” conocimientos nuevos, pero además profundiza en el significado de “construir” al referirse a sistemas concretos y facilitar esta construcción mediante la elaboración de modelos. Nuevamente, esta observación de Gascón se aproxima al camino que se siguió en el §§ 3.3.2, cuando se explicó la naturaleza, origen y desarrollo de las habilidades y capacidades.

Este paradigma es más contextualizado que los anteriores. Además, al tomar en consideración la modelización de sistemas intramatemáticos (y no solo extramatemáticos), conecta funcionalmente el “momento exploratorio” con el “momento teórico”. Gascón concluye que la principal limitación de este paradigma consiste en el olvido del “momento de la técnica” y del papel de las técnicas matemáticas en la actividad de RP. Así, los problemas vuelven a quedar aislados en vez de constituirse en clases de problemas, relativas a los correspondientes métodos de resolución.

Como se puede apreciar, Gascón utiliza en su teoría un concepto nuevo para la DM: los “momentos didácticos”. Se trata de un conjunto de etapas, referidas al quehacer

[234] Véase un excelente análisis en Gascón, J. (1994) El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 6 (3), 37–51.

matemático en el contexto didáctico. Esto es, en términos de Schoenfeld, la determinación de ciertas fases en el "microcosmos matemático".[235] El paradigma de los Momentos Didácticos fue elaborado inicialmente por Chevallard en el marco del "Seminari de Didàctica de les Matemàtiques", del Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona. Su tesis fundamental consiste en que todo problema matemático es el punto de partida de un virtual campo de problemas. Por tanto, enseñar Matemática consiste en lograr que el alumno sea capaz de estudiar ciertos campos de problemas de manera autónoma. Esto es, posibilitar que el alumno llegue a dominar e incluso a producir (a su nivel) técnicas de estudio de ciertos campos de problemas.

Un campo de problemas no es (salvo casos triviales) un conjunto completamente definido; se va constituyendo a medida que se desarrollan las técnicas de estudio. Si a lo largo de este proceso cristalizan métodos de resolución (algorítmicos o no), entonces pueden estudiarse clases de problemas definidas con más precisión. Gascón pone un ejemplo muy ilustrativo: "Para resolver $x^2 – 6x = 18$ podemos utilizar la técnica de completar cuadrados, una técnica gráfica, aplicar una fórmula, etcétera. Cada una de estas técnicas acepta diferentes direcciones de desarrollo que pueden desembocar en técnicas para encontrar el número máximo de soluciones de ecuaciones polinómicas de grado superior, en técnicas para resolver ciertos tipos de inecuaciones o en técnicas para aproximar los ceros de una función, entre otras. En cada caso aparecen nuevas clases de problemas, que pueden ser inesperados, dentro del campo virtual inicial".[236]

El desarrollo interno de las técnicas en manos del alumno conlleva a la necesidad de elaborar modelos más amplios, donde se interpreten y justifiquen las nuevas técnicas. Surge así una relación funcional entre dos momentos de la actividad matemática: el tránsito del "momento de la técnica" al "momento teórico". En general, este paradigma profundiza en las diversas interrelaciones que ocurren entre los momentos didácticos. Particularmente, la necesidad de crear dispositivos didácticos especiales para integrar el momento de la técnica en el aula ha planteado un problema de ingeniería didáctica, cuya solución ha consistido en el establecimiento de los "talleres de prácticas matemáticas".

La actividad de producción de teorías se puede caracterizar como un proceso de estudio de ciertos campos de problemas teóricos los cuales, a su vez, requieren de técnicas específicas junto a teorías que las justifican. Por tanto, la actividad matemática se muestra esencialmente recursiva, y en la que no es posible distinguir absolutamente entre teoría y práctica. Únicamente es posible efectuar una distinción relativa y referirse a la "teoría asociada a cierta práctica matemática".

En resumen, Gascón señala que este nuevo paradigma contiene e integra todas las actividades matemáticas que enfatizaron unilateralmente los paradigmas anteriores. Particularmente, ha puesto de manifiesto las disfunciones originadas por la ausencia del momento de la técnica en los actuales sistemas de enseñanza de la Matemática. Además, este paradigma proporciona una interrelación dialéctica entre el proceso de

---

[235] Véase Schoenfeld, 1992, *op. cit.*
[236] Ibíd., p. 49.

desarrollo de las técnicas, la evolución de los campos de problemas, y la construcción recursiva de las técnicas matemáticas asociadas. Finalmente, al considerar estas teorías como modelos del sistema subyacente a ciertos campos de problemas, este paradigma engloba al de Modelización.

Este hecho constituye un indicio algo verosímil, que puede suscitar la creencia de que el paradigma de los momentos didácticos subsume la Enseñanza Problémica. ¿Es esto cierto? Algunos autores cubanos, al parecer, lo consideran así cuando asumen tácitamente los postulados de dicho paradigma en sus investigaciones. Esto es una razón impelente para intentar un análisis retrospectivo. Para llevar a cabo la discusión se tomarán como base dos preguntas esenciales:

a) ¿es clásico (en términos brousseanos) el enfoque erigido en el presente capítulo?; y

b) ¿constituye la Enseñanza Problémica un paradigma limitado, con respecto al de los Momentos Didácticos?

En primer lugar, debe analizarse si la Enseñanza Problémica es un enfoque “clásico”. Es sabido que el estudio del proceso de RP es sumamente enrevesado. Cualquier teoría que intente fundamentarlo científicamente, siempre constituirá una aproximación a la realidad objetiva que este encierra. Como ya se ha visto, su complejidad se deriva de dos actividades por sí mismas muy complejas: el quehacer matemático y los procesos cognitivos asociados. ¿En cuál de ellas debe poner el énfasis la DM?

Ciertamente, la mayoría de las investigaciones han enfatizado los aspectos psicosociales. En este caso, han coexistido dos caminos paralelos; unos se enmarcan en aspectos afectivo–motivacionales, mientras que otros lo hacen en la esfera cognitiva. Ambos caminos han tenido el mérito de desentrañar aspectos prácticamente insospechados de la DM, como el papel del género en la RP y el de la metacognición. Sin embargo, el énfasis que ponen, muchas veces las hacen carecer de una explicación científica suficientemente integradora. Regularmente, los primeros se adscriben al paradigma cualitativo, mientras que los segundos lo hacen al cuantitativo. En el capítulo 6 se abordará esto con más detalle.

Por otro lado, un número algo menor pero significativo de trabajos, alude al quehacer matemático como objeto primario de la DM. Al hiperbolizar el conocimiento matemático, incorporan a las investigaciones una nueva visión de los problemas, del proceso de RP, de los papeles que juegan el maestro y el alumno, entre otros. Desde esta perspectiva, acusan al resto de las investigaciones de erigirse sobre un “psicologismo ingenuo”, ignorando el papel de la psiquis en la actividad matemática. Además, minimizan los resultados del enfoque “clásico”, alegando que no construyen la DM como disciplina científica, por su constante importación de saberes privativos de otras ciencias.

La dialéctica enseña que ningún enfoque es superior al otro. Es más, ambos son herencia de la naturaleza multidisciplinaria que ha tenido la DM en sus orígenes, enfatizando la explicación psicológica por un lado, y la matemática por el otro. En ambos casos se está pasando por alto un grupo importante de hechos y fenómenos de naturaleza pedagógica, lo cual acentúa la insuficiencia de ambos caminos. Por ejemplo, puede ocurrir que la "falta de motivación" no sea "irresponsabilidad matemática" del alumno, sino un temor originado por inadecuados procedimientos del maestro.[237] Luego, no es posible compartir la tesis que enarbola la Didáctica Fundamental como metateoría, generalizadora del resto de las teorías en DM. Es más, no existe justificación para esa "ambición" de construir la DM como disciplina científica. Tal y como se vio en el capítulo 1, las condiciones objetivas están dadas; de modo que el empeño subjetivo se supeditará al objetivo.

Por otra parte, tampoco es aceptable el criterio de que los conceptos "importados" frenan el desarrollo de la ciencia. Por el contrario, es necesario recordar que fueron estudios pedagógicos los que suscitaron el nacimiento de una importante rama de la Psicología: la Psicología del Aprendizaje. Por tanto, cabe esperar una evolución del concepto de "aprendizaje significativo", de manera que la Pedagogía se enriquezca y la Psicología se retroalimente.[238] Sucesos similares han acaecido también en las ciencias exactas. En efecto, la Física se vio en la necesidad de asociar el concepto de tangente a una curva para explicar la velocidad de cambio. Esto sirvió de base para el surgimiento del concepto de derivada y enriqueció la noción que hasta entonces se tenía de tangente. La Matemática recibió un fuerte impulso, desarrollándose el Calculo Diferencial y la Topología, respectivamente. Al unísono, la Física también se iba enriqueciendo con las aportaciones de estas ramas de la Matemática.

Sobre la base del análisis anterior, puede afirmarse que las investigaciones que enfatizan los procesos psíquicos asociados a la RP no pueden desarrollarse al margen de los hechos sociales, pedagógicos y matemáticos. Esto tampoco es motivo para afirmar que una investigación tiene necesariamente que englobar dichos componentes en igual medida. Un aspecto clave para un buen diseño de investigación consiste en determinar el papel que desempeña cada componente. Por tanto, una investigación que dé prioridad al análisis de la psiquis, durante el proceso de RP, puede contribuir a la construcción de la DM como disciplina científica. El valor de esta investigación sería todavía mayor si durante el análisis son tomados en cuenta problemas epistemológicos, pedagógicos, matemáticos y sociales.

El propósito de este libro, como ya se ha señalado, consiste en deslindar la naturaleza del proceso de RP, el cual tiene lugar en el pensamiento humano; de manera que no existe sitio más oportuno que la psiquis para abordarlo. El análisis del concepto de problema reveló la necesidad de tomar en consideración diversos problemas de orden epistemológico, lo cual es una muestra de que el énfasis que se ha puesto en los procesos psíquicos no es ajeno a los problemas desenmascarados

---

[237] Chevallard, Bosch y Gascón explican los cuchicheos y otras indisciplinas similares como la ruptura de algún "contrato" en términos brousseanos. Si existe un pequeño grupo de alumnos que no están integrados realmente en la escuela y preferirían estar en algún otro sitio, se trata de la ruptura del *contrato escolar*. Si a los alumnos no les gusta el estilo pedagógico del profesor, o bien este no tiene suficiente autoridad, o menosprecia a los alumnos, se trata de la ruptura del *contrato pedagógico*. Si lo que sucede es que el profesor está resolviendo un problema por una técnica que los alumnos desconocen, entonces tiene lugar la ruptura del *contrato didáctico* (*op. cit*., p. 205).

[238] Actualmente se habla, incluso, de una nueva disciplina científica denominada "Psicodidáctica". Véase, por ejemplo, Gelfman, E.; Kholodnaya, M. and Cherkassov, R. (1997) From Didactics of Mathematics to Psycho–Didactics. In N. A. Malara, Ibíd., pp. 102–107.

por la Didáctica Fundamental. Es más, la necesidad de desentrañar el proceso de RP conducirá en el capítulo 6 a la búsqueda de dispositivos para el análisis experimental; lo cual sería una modesta aportación a la Ingeniería Didáctica.

En relación a la pregunta (b), es menester realizar también algunas observaciones. Más arriba se hizo alusión a un grupo de indicios que conducían a identificar la Enseñanza Problémica con el paradigma de la Modelización. Ciertamente, existe una estrecha relación estructural entre esta última y el modelo de la figura 19. Sin embargo, Gascón nos describe un paradigma aparentemente lineal y carente de contenido. Al exponer el basamento teórico de la enseñanza “a través” de la RP, se advirtió la necesidad de expresarla por medio de todo el modelo de Wyndhamn; de manera que la Enseñanza Problémica se estructura por complejos de relaciones, propias de dicho modelo. No obstante, el sistema categorial de este tipo de enseñanza deja claro que su esencia va más allá, enlazándose con problemas epistemológicos relativos a la construcción del conocimiento científico.

Puede concluirse que la Enseñanza Problémica *no se identifica* con la Modelización, aun cuando en el plano psicológico tengan determinadas coincidencias. Ahora bien, si la Enseñanza Problémica es más amplia que la Modelización, qué relación guarda con el paradigma de los Momentos Didácticos. Ambos enfoques tienen el mérito de poner al descubierto las deficiencias de sus antecesores; y se esfuerzan por integrar los legados más positivos. Existen, sin embargo, diferencias sustanciales de orden epistemológico. Mientras la teoría de los Momentos Didácticos prioriza el componente matemático, la Enseñanza Problémica enfatiza los aspectos psicológicos. En este último caso, a diferencia del primero, se tienen en cuenta otros aspectos consustanciales de orden matemático y pedagógico (véase el esquema de la figura 19).

Ambas teorías son valiosas y proponen perspectivas renovadoras para la DM. La Enseñanza Problémica aventaja al paradigma de los Momentos Didácticos en más de 30 años, de modo que es natural encontrar en ella diferentes conexiones con otras ciencias. El paradigma de los Momentos Didácticos, sin embargo, al heredar la sistematicidad y logicidad de la actividad Matemática, tendrá un rápido desarrollo en los años venideros. Ya se han expuesto múltiples argumentos teóricos, conducentes a rechazar la idea de partir de una teoría general del aprendizaje.[239] La DM debe elaborar una teoría del aprendizaje matemático; y son muchas las razones para acoger, como base teórica, a la Enseñanza Problémica. No obstante, es justo reconocer el enorme valor de las aportaciones teóricas que dimanan del paradigma de los Momentos Didácticos, principalmente las siguientes:

a) La demarcación de tres etapas esenciales de la actividad matemática escolar: el momento exploratorio, el momento de la técnica y el momento teórico.

b) La necesidad de enfocar el quehacer matemático como un proceso de estudio de campos de problemas.

c) La presentación del aprendizaje y del conocimiento matemático como objetos no primarios de la DM.

[239] Véase lo que ha sido considerada la carta fundacional del PME en Bauersfeld, H. & Skowronek, H. (1976) *Research related to the mathematical learning process*. In Athen & Kunle (Eds.), pp. 231–245.

Todos estos aspectos serán tomados en consideración en los próximos capítulos. Particularmente, el concepto de técnica ocupará un lugar importante dentro del análisis de diferentes estrategias metacognitivas, tanto de resolución (capítulo 4) como de formulación (capítulo 5).

El análisis de las corrientes contemporáneas del aprendizaje de la Matemática va más allá de las consideraciones realizadas en este epígrafe. Resultó prudente examinar la escuela francesa, por constituir un ejemplo fehaciente de teoría discordante con los paradigmas más conocidos en Cuba. Una discusión similar pudo girar en torno al Interaccionismo Simbólico, corriente que está ganando muchos adeptos en Europa.[240] Para tener solo una idea de cuan complejo es el tema, en la propia Rusia que dio vida a la Enseñanza Problémica, algunos teóricos tratan de relegarla a un plano inferior.

Por ejemplo, Gelfman, Kholodnaya, y Cherkassov la incluyen entre cinco modelos de la "Didáctica Tradicional". Contraponiéndolos a un "nuevo" paradigma, donde llevan trabajando más de 20 años.[241] Se trata del "Modelo de Enriquecimiento de la Educación", el cual enfatiza cómo y qué debe enseñarse en Matemática. Su elemento psicológico clave es la "experiencia mental individual" consistente en un "sistema de formaciones psíquicas de lectura, los cuales aparecen gracias a las condiciones físicas que predeterminan la actividad intelectual individual y concreta". Nada más cercano al modelo neopositivista vandervertiano (véase la figura 5 del capítulo 2).

[240] Para los partidarios de esta corriente, las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático, sino parte intrínseca del mismo. Se enfatiza como foco de estudio las interacciones *entre individuos* dentro de una cultura, en lugar de *sobre el individuo*. Conocer o recordar alguna cosa se concibe como la activación momentánea de opciones a partir de acciones experimentadas, más que como un "objeto", llamado conocimiento. El interaccionismo postula el carácter discursivo del conocimiento, donde el discurso no es solo lenguaje sino lenguaje–en–acción. El lenguaje es visto como un moldeador activo de la experiencia, y no como un espejo de la realidad. En particular, la Matemática es vista como un tipo particular de discurso. Bauersfeld sitúa la perspectiva interaccionista entre dos polos: la perspectiva individualista (psicología cognitiva, con referencia a Piaget) y la perspectiva colectivista (teoría de la actividad, con referencia a Vigotsky). Véase Bauersfeld, H. (1994) Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In: R. Biehler; R. Scholz; R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.) *Didactics of mathematics as scientific discipline* (pp. 133–146). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

[241] Tres de los cinco modelos incluyen autores ya examinados en este libro. En efecto, en el "Modelo Desarrollador" sitúan a D. B. Elkonin y V. V. Davidov; en el "Modelo formativo" a P. J. Galperin y N. F. Talízina; y en el "Modelo de Hurgamiento de la Actividad" ("Stirring to Activity Model"), figuran M. I. Majmutov y M. N. Skatkin. Véase especialmente la tabla que aparece en E. Gelfman et. al., *op. cit*., p. 106.

Bibliografía para el capítulo 3

Para profundizar en el campo de la filosofía de la DM se recomienda realizar un estudio crítico de las siguientes obras:

Artigue, M. (1990) Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2.3), 241–286.

Artigue, M. (1995) Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.): *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 33–59). Santa Fe de Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bishop, A. (1988) *Mathematical enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Blaire, E. (1981) *Philosophy of Mathematics Education*. Unpublished doctoral dissertation, Institute of Education, University of London.

Brousseau, G. (1983) Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2).

Chevallard, Y. (1991) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Confrey, J. (1990) What constructivism implies for the teaching. In R. B. Davis, C. A. Maher & N. Noddings (Eds.): *Constructivist view on the teaching and learning of mathematics. Journal for research in Mathematics Education monograph*, 4, 107–122.

Dawson, A. J. (1969) *The implications of the work of Pooper, Polya and Lakatos for the model of mathematics instruction*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta.

Engels, F. (1894/1990) *Anti–Dühring*. La Habana: Pueblo y Educación.

Ernest, P. (1991) *The philosophy of Mathematics Education*. Philadelphia: The Flamer Press.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000) El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70–92.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos (1978). *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, Volume 2. Cambridge: Cambridge University Press.

Lenin, V. I. (1909/1990) *Materialismo y empiriocriticismo*. La Habana: Pueblo y Educación.

Lerman, S. (1983) Problem–solving or knowledge–centred: The influence of philosophy on mathematics teaching. *Intenational journal of Mathematics Education in science & technology*. 14 (1), 59–66.

Lerman, S. (1994, Ed.) *Cultural perspectives on the mathematics classroom.* Dordrecht: Kluwer.

Skovmose, O. (1994) *Towards a philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stewart, I. (2004) *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy*. Barcelona: Crítica.

Turner, S. & Sullenger, K. (1999) Kuhn in the classroom, Lakatos in the lab: Science educators confront the nature–of–science debate. *Science, Technology & Human Values*, 24 (1), 5–31.

Vergnaud, G. (1990) Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the PME*. Cambridge: Cambridge University Press.

Von Glasersfeld, E. (1983) An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.): *The invented reality*, 17–40, NY: Norton.

Para profundizar en las bases psicopedagógicas de la RP, el lector puede complementar su estudio con la lectura de los siguientes títulos:

Cantoral, R. et al. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

De Lagrange, J. et al. (1993, Eds.) *Innovation in maths education by modelling and applications*. Chichester, Ellis Horwood Limited.

Dreyfus, T. (1990) Advanced mathematical thinking. In A. Hownson & J. Kahane (Eds.) *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113–134). Cambridge: Cambridge University Press.

Duval, R. (1991) Structure du raisonnement deductif et aprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*, 22, 233–261.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical phenomenological of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Gallo, E. (1991) Il metodo delle attività per educare al pensiero matematico. *L'Educazione Matematica*, 3 (1), 77–94.

Greca, I. M. & Moreira, M. A. (2000) Mental models, conceptual models, and modelling. *International Journal of Science Education*, 22 (1), 1–11.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1985) A model of student's decimal computationn procedures. *Cognition and instruction*, 2, 175–205.

Hugh, M. (1987) *Psicoanálisis*. Barcelona: Labor.

Johnson–Laird, P. (1983) *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson–Laird, P. (1996) Images, models, and propositional representations. In M. de Vega et al. (Eds.): *Models of visuospatial cognition* (cap. 3, pp. 90–126). NY: Oxford University Press.

Lerman, S. (1996) Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constuctivist paradigm? *Journal for research in Mathematics Education*, 27 (2), 133–150.

Matos, J. M. (1992) Cognitive models in geometry learning. In J. P. Ponte et al. (Eds.): *Mathematical problem–solving and new information technologies* (pp. 93–112). Berlin: Springer.

Moreira, M. A. (1996) Modelos mentais. *Investigações em encino de ciencias*, 1 (3), 193–232.

Nesher, P. & Kilpatrick, J. (1990, Eds.) *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Otero, M. R.; Papini, M. C. and Elichiribethy, I. (1998) Las representaciones mentales y la enseñanza de la Matemática. *Educación Matemática*, 10 (3), 90–102.

Piaget, J. (1941) *La genese du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Schoenfeld, A. H. (1994, Ed.) *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Talízina N. F. (2001) *La formación de la habilidad cognoscitiva de los escolares*. México: Ángeles Editores, S. A.

Talízina N. F. (2001) *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Talízina N. F. (2000) *Psicología pedagógica*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Tall, D. (1991, Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

El estudio del concepto "problema", así como de otros conceptos afines puede ser realizado siguiendo las siguientes obras:

Arsac, G.; Germain, G. et Mante, M. (1988) *Probleme ouvert et situation–probleme*. Lyon: IREM de l'Université Claude Bernard.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1993) Una classificazione dei problemi casiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*, 3, 348–353.

Para profundizar en los elementos relativos a las habilidades matemáticas, y al desarrollo del pensamiento, se recomienda la lectura de los siguientes títulos:

Álvarez, S. (1996) *Las Habilidades Lógicas. Posibilidades para su Desarrollo a través de la Enseñanza de la Matemática*. Ponencia presentada en el evento provincial Pedagogía' 97, ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

Carretero, M. (1985) El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: las operaciones formales. En: M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.) *Psicología evolutiva 3. Adolescencia, madurez y senectud*. Madrid: Alianza.

Castorina, J. A. y Palau, G. D. (1981) *Introducción a la lógica operatoria de Piaget*. Paidós: Buenos Aires.

Delgado, J. R. (1995) Un sistema de habilidades generales para la enseñanza de la Matemática. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Docentes e Investigación en Educación Matemática*. La Habana.

Fuentes, H. C. (2001) *Didáctica de la Educación Superior*. INPAHU, Bogotá.

Gorsky, D. (1987) *Generalization and cognition*. Moscow: Progress Publishers.

Guétmanova, A. (1989) *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Guétmanova, A.; Panov, M. y Petrov, V. (1991) *Lógica: en forma simple sobre lo complejo* (diccionario). Moscú: Editorial Progreso.

Krutetski, V. (1989) *Psicología*. VIPO Vnshtorgizdat, Moscú.

Malara, N. (1997) Argumentation and proof in arithmetics: some results of a long lasting research. *L' educazione matematica, Anno XVIII; Serie V, 2, 82–102.*

Rizo, C. (1989). *Sistema de conocimientos, hábitos y habilidades: Su comprobación*. III Seminario Nacional del MINED, La Habana.

Yoshikawa, H. (1981) General design theory and CAD system (pp. 35–58). In: T. Sata & E. Warman (Eds.) *Man–machine communications in CAD/CAM*. North–Holland.

Para profundizar en el campo de la Enseñanza Problémica, el lector puede estudiar las siguientes obras:

Majmutov, M. I. (1970) La enseñanza problémica y sus particularidades. *Pedagogía Soviética*, No. 9, Moscú.

Majmutov, M. I. (1972) *Problemas de la organización de la enseñanza problémica*. Editorial Nauka, Kazán.

Majmutov, M. I. (1977) *Teoría y práctica de la enseñanza problémica*. Universidad de Kazán.

Majmutov, M. I. (1983) *La enseñanza problémica*. La Habana: Pueblo y Educación.

Martínez, M. (1981) La enseñanza problémica. *Educación*, No. 43, pp. 82–91.

Martínez, M. (1984) La Enseñanza Problémica: ¿sistema o principio? *Varona*, año VI, No. 12, pp. 71–82, La Habana.

Martínez, M. (1986) *Fundamentos teóricos y metodológicos de la enseñanza problémica*. Curso del congreso Pedagogía' 86, La Habana.

Martínez, M. (1998) *Calidad educacional, actividad pedagógica y creatividad*. La Habana: Editorial Academia.

Martínez, M. (1986) *Fundamentos teóricos y metodológicos de la enseñanza problémica*. Curso impartido en el congreso Pedagogía' 86. La Habana: MINED.

Torres, P. (1996) *La utilización de los métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática del nivel medio general*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.

Torres, P. (1997) *La Enseñanza Problémica de la Matemática: Una Concepción Vigotskiana en la Educación Matemática*. ISP "Enrique José Varona", La Habana.