

Cómo introducir conceptos elementales sobre matrices y solución de sistemas de ecuaciones lineales desde la clase de EXCEL

Lic. Eric Crespo Hurtado

Dr. C. Tomás Crespo Borges

En 1986, la junta directiva del National Council of teachers of mathematics cuya sigla es NCTM, (Consejo Nacional de profesores de matemáticas) creó la "Commission on Standards for School Mathematics" con el objetivo de ayudar a la mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Esta comisión tuvo dos tareas bien definidas:

1. "Crear una visión coherente de lo que significa poseer " cultura matemática" en un mundo sustentado por calculadoras y ordenadores, donde las matemáticas se desarrollan vertiginosamente y aumentan día a día sus aplicaciones a los más diversos campos
2. Crear un conjunto de estándares para guiar la revisión del currículo matemático escolar y la valuación asociada a esta posición. Los grupos de trabajo de esta comisión prepararon estos estándares en respuesta a estas necesidades."¹

Aunque este estudio estuvo dirigido a las escuelas norteamericanas, por el prestigio que tiene el NCTM y la objetividad del informe, constituye desde entonces un marco de referencia para cualquier estudio serio que se haga sobre la necesidad de cambios en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática; dado que el documento contiene una concepción que se corresponde con el desarrollo tecnológico y las necesidades sociales, estableciendo un marco amplio donde encuadra la reforma de las matemáticas en la escuela durante la última década del siglo XX que se ha extendido a los primeros del siglo XXI; dando además una visión general de lo que debe incluir el currículo de matemática en cuanto a prioridad e importancia de contenidos.

¹ NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OR MATHEMATICS (NCTM). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla. 1989.

La primera y más importante idea reflejada en este documento es:

“Existe el consenso [...] de que todos los estudiantes necesitan aprender más matemáticas, y a menudo diferentes, [...] por tanto, la educación matemática debe ser revisada en profundidad.”

Este criterio, compartido por todos, está sustentado en:

- **El desarrollo de la sociedad de la información.**
- **Los nuevos objetivos sociales.**
- **Los trabajadores necesitan una mayor educación matemática.**
- **El aprendizaje permanente es una necesidad de la sociedad contemporánea.**
- **La oportunidad de estudios para todos**

NCTM defines los **temas que han de recibir más atención** y entre ellos se encuentras “**Las matrices y sus aplicaciones**”

Como este tema no siempre aparece en los actuales programas del bachillerato, proponemos una alternativa para introducirlo desde la clase de computación o también una vía para consolidar estos contenidos y ofrecer una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones aplicando el concepto de matriz inversa.

Definición

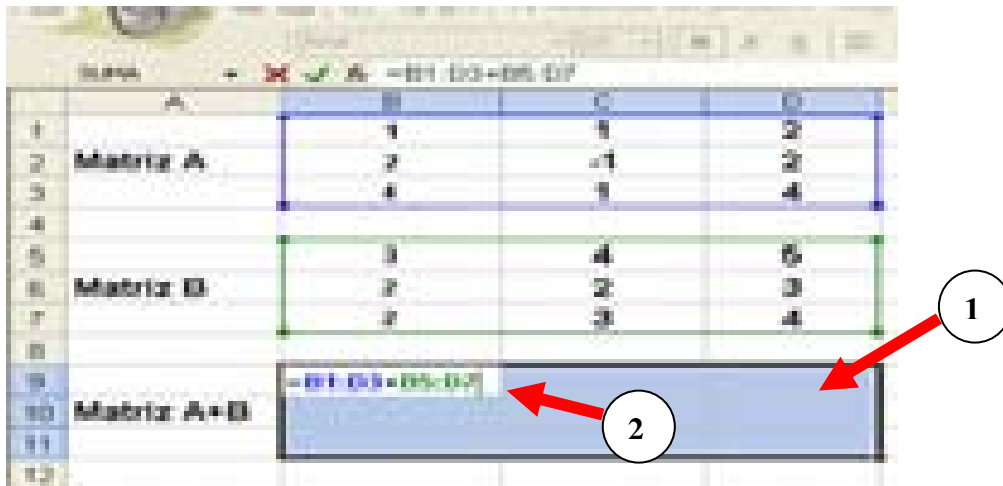
Una matriz es un conjunto de elementos de cualquier naturaleza aunque, en general, suelen ser números ordenados en filas y columnas

	A	B	C	D
1	1	1	2	
2	2	-1	2	
3	4	1	4	
4				
5				
6				

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, ... Un elemento genérico que ocupe la fila i y la columna j se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz : $A = (a_{ij})$

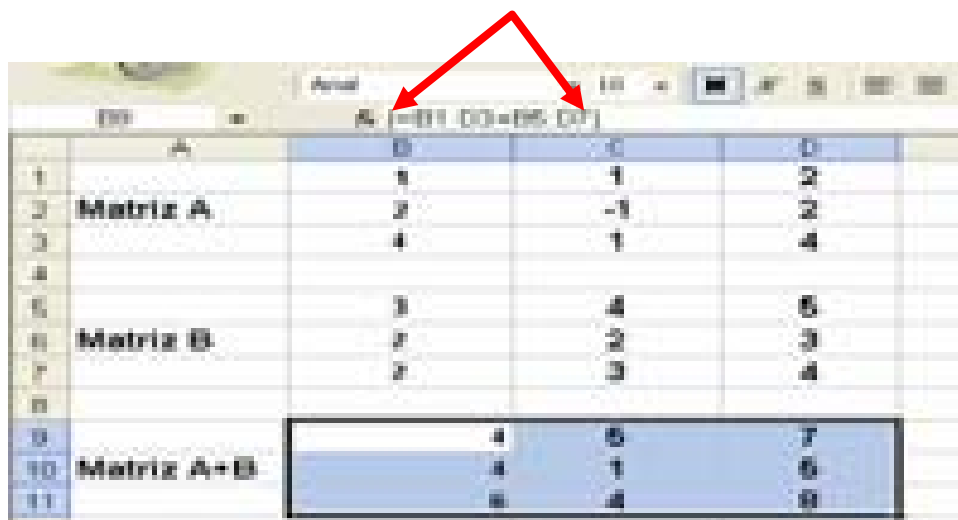
Operaciones con matrices: El algoritmo para sumar y restar matrices es el mismo de sumar o restar números sólo que hay que tomar en consideración que el resultado es una matriz. El algoritmo a seguir es:



1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz .suma.
2. Escribir el signo igual
 - a. Seleccionar la primera matriz
 - b. Escribir el signo +
 - c. Seleccionar la segunda matriz.
 - d. Terminar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter.

Toda fórmula matricial debe finalizar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter.

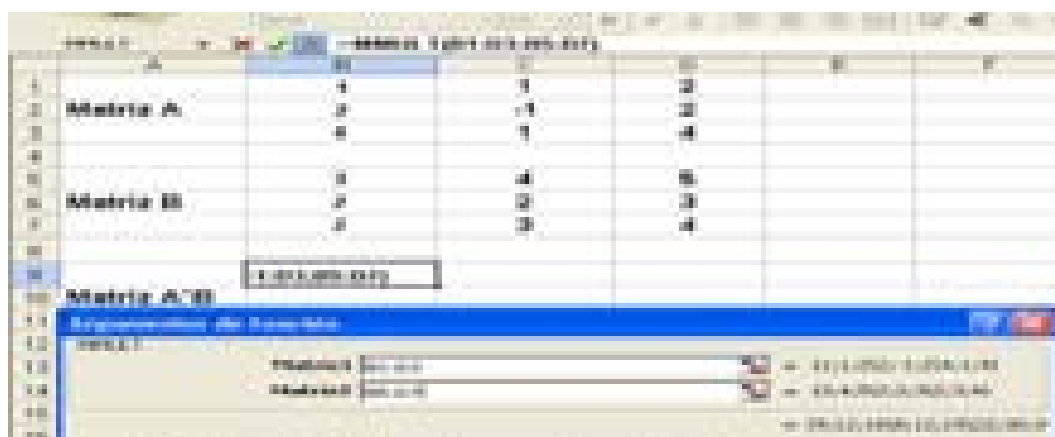
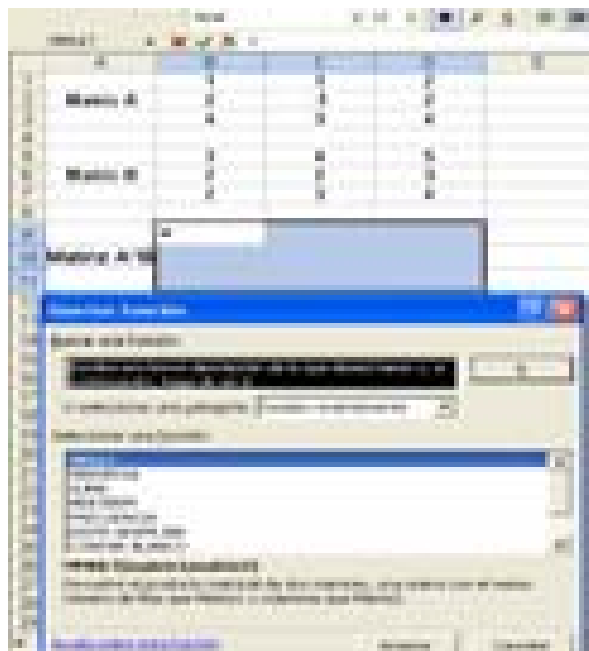
De aquí el resultado. Observe que esta fórmula aparece entre llaves



Para la multiplicación de matrices existe la función **MMULT(matriz1; matriz2)**

El algoritmo a seguir es:

1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz .suma.
2. Escribir el signo igual
 - a. Seleccionar la función **MMULT**
 - b. Seleccionar en el diálogo las matrices a multiplicar.
 - c. Termina con la combinación de teclas **Ctrl+MAYÚSCULA+Enter**



Finalmente resulta:

Matriz A	1	1	2
	2	-1	2
	4	1	4
Matriz B	3	4	5
	2	2	3
	2	3	4
Matriz A*B	9	12	16
	8	12	15
	22	30	39

Algunos tipos de matrices.

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma y naturaleza de sus elementos reciben nombres diferentes:

Matriz fila: Es una matriz que sólo tiene una fila, es decir $m = 1$ y por tanto es de orden $1 \times n$.

	A	B	C	D
1				
2	2	-1	2	
3				
4				

	A	B	C
1		i	
2		-i	
3		i	
4			

Matriz columna: Es una matriz que sólo tiene una columna, es decir, $n = 1$ y por tanto es de orden $m \times 1$

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir $m = n$. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n , y no $n \times n$.

Los elementos a_{ij} con $i = j$, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ la diagonal secundaria.

	A	B	C	D	E
1					
2		1	i	2	
3		3	1	3	
4		4	1	4	
5					
diagonal secundaria					
diagonal principal					

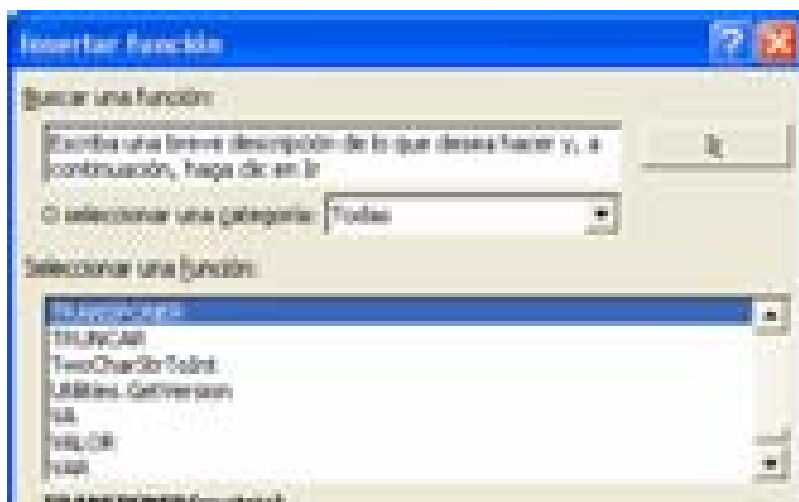
Matriz transpuesta: Dada una matriz A, se llama transpuesta de A, y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t , la segunda fila de A es la segunda columna de A^t , etc.

EXCEL posee la función **TRANSPONER** que permite hallar la transpuesta de una matriz.

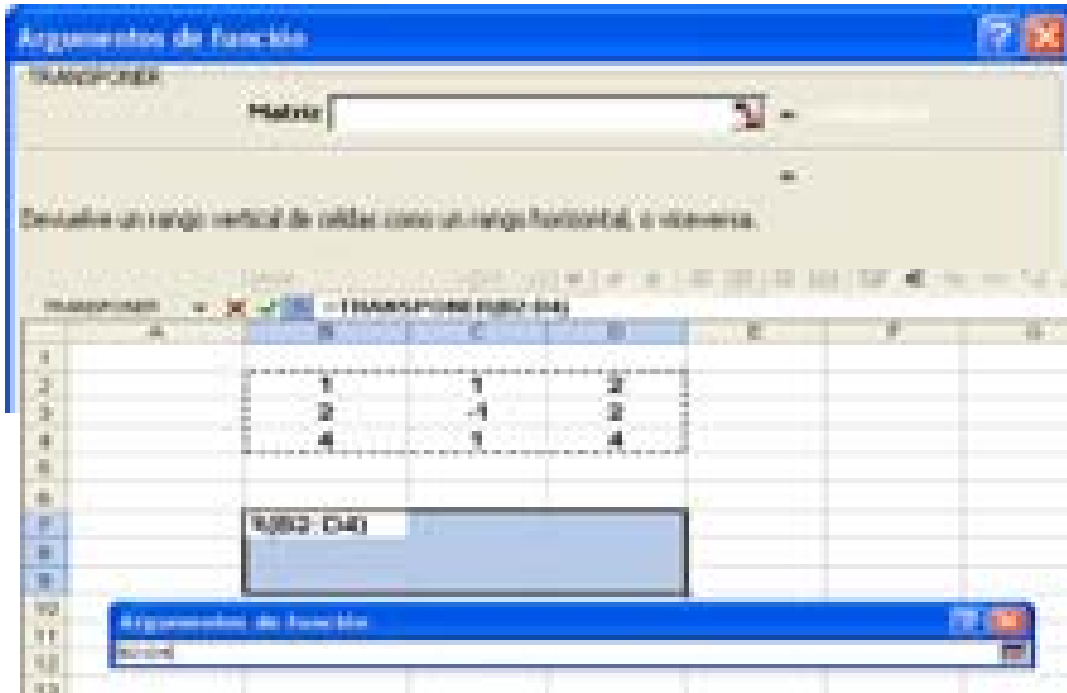
Sintaxis: **TRANSPONER (matriz)** para utilizarla debe proceder del siguiente modo:

1. Seleccionar la parte de la tabla donde va a colocar la matriz transpuesta.
- 2.
3. Escribir el signo igual y seleccionar la función **TRANSPONER**

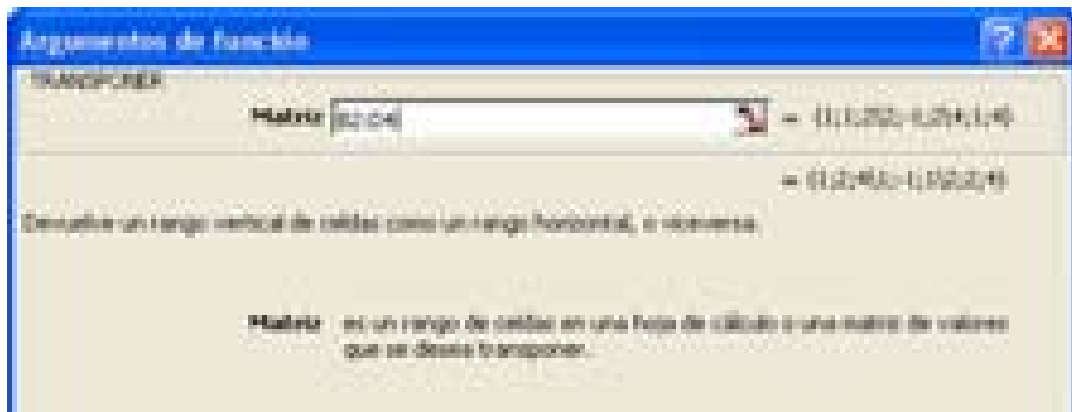
	1	1	2	
	2	-1	2	
	4	1	4	



Seleccionar la matriz.



4. Como toda fórmula matricial debe finalizar con la combinación de teclas Ctrl+MAYÚSCULA+Enter. Después se obtiene el resultado.



	A	B	C	D	E
1					
2		1	1	2	
3		2	-1	2	
4		4	1	4	
5					
6					
7		1	2	4	
8		1	-1	1	
9		2	2	4	
10					

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si: $A = A^t$, es $a_{ij} = a_{ji}$ " i, j
La matriz es igual a su transpuesta.

	B	C	D	
1	1	3		
1	-1	3		
3	3	4		

Matriz nula: es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por **0**.

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos que no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

	A	B	C	D
1				
2		0	0	0
3	Matriz nula	0	0	0
4		0	0	0
5				
6		5	0	0
7	Matriz Diagonal	0	-6	0
8		0	0	8
9				
10		1	1	1
11	Matriz unidad o Identidad (I)	1	1	1
12		1	1	1

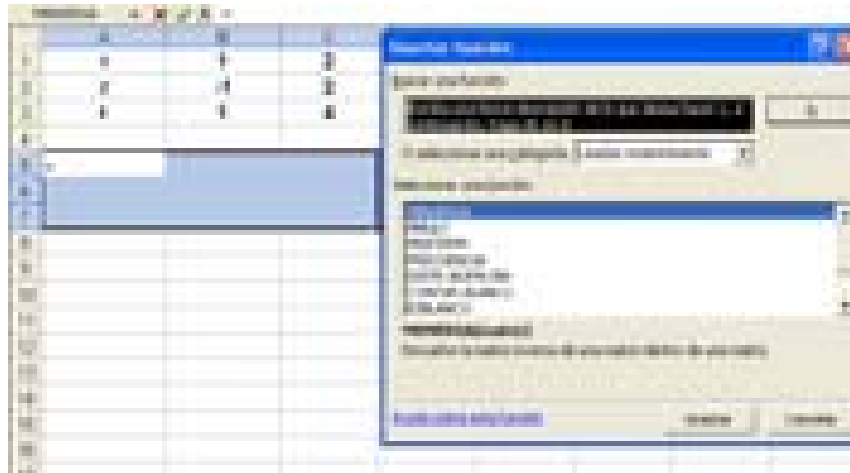
Matriz unidad o identidad. Se designa por I : Es una matriz .en la que todos sus elementos son iguales a 1.

Matriz inversa: Una matriz cuadrada A tiene inversa, A^{-1} , si se verifica que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Es decir, el producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz unidad.

EXCEL tiene la función **MINVERSA (matriz)** con la que se puede calcular la inversa de una matriz.



	A	B	C	D
1		1	1	2
2	Matriz	2	-1	2
3		8	1	8
4				
5		-1	-0,33333333	0,66666667
6	Inversa	8	-0,66666667	0,33333333
7		8	0,5	-0,5
8				

Solución de sistemas de ecuaciones.

Utilizando los conceptos y operaciones dadas es posible calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones. Por analogía del proceso de solución de una ecuación lineal, daremos algunos elementos que justifican el algoritmo a utilizar y facilitan su comprensión.

Partamos de lo conocido:

Sea la ecuación

$$3x = 6$$

Multiplicando por $1/3$ ambos miembros se tiene: $1/3 * 3x = 6 * 1/3$

$$1 * x = 2$$

Solución

$$x = 2$$

Situación nueva

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Este sistema se puede} \\ \text{expresar por la} \\ \text{ecuación:} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ambos miembros por la matriz inversa se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Por la definición se inversa se sabe que el producto de una matriz por la inversa da como resultado la idéntica, por tanto se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{Y de aquí se} \\ \text{concluye:} \end{array} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Llegando a las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El algoritmo seguido es:

1. Expresar el sistema como la matriz del sistema y la matriz columna formada por los términos independientes.
2. Calcular la inversa de la matriz del sistema.
3. multiplicar la matriz inversa por la matriz columna de los términos independientes.
4. El resultado son las soluciones del sistema

Un esquema del proceso y las fórmulas utilizadas se muestra a continuación.

	A	B	C	D	E
1	Matriz del sistema				Terminos independientes
2	1	1	2		-1
3	2	-1	3		-4
4	4	1	4		-2
5					
6		Matriz inversa			
7		=MINVERSA(A2:C4)			
8	.1	0.33333333	0.66666667		
9	0	0.66666667	0.33333333		
10	1	0.5	-0.5		
11				1	=MULT(A7:C9;E2:E4)
12				2	Soluciones
13				-2	

Con los ejemplos antes expuestos se muestra la posibilidad de introducir en forma sencilla y con poca teoría, pero sin faltar a ella, los conceptos elementales sobre matrices y la solución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando el concepto de matriz inversa, valiéndonos de las funciones que suministra la aplicación EXCEL.