De Construcción de Procesos en el Contexto de las Matemáticas

AUTOR: **ADONAY JARAMILLO GARRIDO**

PRESENTACIÓN.

Si algo nos ha marcado a los maestros de matemática es la manera rígida, inmodificable y permanente de presentar los temas. Son pocos los cambios introducidos.

Los textos cambian de ejercicios pero el modelo de solución es el mismo. No nos hemos atrevido a **deconstruir** y a cuestionar el conocimiento matemático que respetables maestros nos legaron hace siglos. Esta es la intención de este trabajo y espero que lo disfrute y que se atrevan a hacer de cada tema una tarea de cambio y de modificación ya que solo así podríamos estar generando un nuevo conocimiento y cambiando la opinión de que en matemática "todo está dicho". Al proponer este documento no queda en discusión si lo que propone es metodológicamente mejor o no, o si el enfoque pedagógico corresponde o no, a un determinado modelo. La intención es solo **MOSTRAR** que se **PUEDE** modificar e introducir alternativas diferentes al trabajar los temas que se proponen. Que se puede mejorar los contenidos de la enseñanza y proponer condiciones que aseguren al estudiante la construcción de un **saber viviente, susceptible de evolución, y funcional que permita resolver interrogantes (Douady sin fecha en la página 2... Tomado de los Lineamientos Curriculares. Nuevas Tecnologías y currículo de matemáticas página 22).** Amigo lector y colega, usted tiene la palabra!.

Aquí encuentras:

i) La **factorización** trabajada toda, hallando el factor común (por agrupación).

ii) La **factorizaciòn** de expresiones consideradas no factorizables en los modelos tradicionales.

iii) La f**actorización** en el contexto de los exponentes racionales.

v.) La racionalización sin utilizar la conjugada..

vi.) La poesía como estrategia para **AFIANZAR** conocimientos.

vii.) Una manera diferente de resolver un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas o de tres incógnitas.

FACTORIZACION

La descomposición factorial por agrupación (hallando factor común) muestra la siguiente dinámica:

I. Factorizar: $2x + 4y = 2(x + 2y)$

$m(x + y) + n(x + y) = (x + y)(m + n)$

$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$

$(a+b)(x + y)$.

Podemos continuar descomponiendo en factores otros “modelos factorizables” utilizando esta misma estrategia. Veamos:

(Diferencia de cuadrados)

1. $a^2 - b^2 = a^2 - b^2 + ab - ab.$

$= a^2 + ab - b^2 - ab$

$= a(a+b) - b(a+b)$

$= (a + b)(a-b)$

2. $9x^2 - 25 = 9x^2 - 25 + 15x - 15x$

$9x^2 + 15x - 15x - 25$

$3x (3x + 5) - 5 (3x + 5)$

$(3x + 5) (3x - 5)$

CRITERIO: " Se suma y se resta el producto de las raíces cuadradas de los extremos y se procede agruparlos teniendo en cuenta el factor común . De ahí en adelante, el procedimiento es similar al que se aplica cuando hay factor común!.

(SUMA DE CUBOS)

3. $x^3 + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 12x$

$= (x + 2)^3 - 6x (x + 2)$

$= (x + 2) [(x + 2)^2 - 6 x]$

$= (x + 2) (x^2 + 4x + 4 - 6x)$

$= (x + 2) (x^2 - 2x + 4)$

4. $8x^3 - 27 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 + 36x^2 - 54x$

$= (2x - 3)^3 +18x (2x - 3)$

$= (2x - 3) [(2x - 3)^2 + 18x]$

$= (2x + 3) (4x^2 - 12x + 9 + 18x)$

$= (2x - 3) (4x^2 + 6x + 9)$

CRITERIO: Se le suma y se le resta al binomio las expresiones que lo convierten en un polinomio cubo perfecto teniendo en cuenta como términos del binomio las raíces cúbicas de cada uno delos términos y luego se procede tal como se hace cuando hay factor común.

DIFERENCIA DE CUBOS.

5. $x^3 - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12x^2 - 48x$

$= (x - 4)^3 + 12x (x - 4)$

$= (x - 4) [(x - 4)^2 + 12x]$

$= (x - 4) (x^2 - 8x + 16 + 12x)$

$= (x - 4) (x^2 + 4x + 16)$

6. $27x^3 + 64y^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144y^2.x + 64y^3 - 108x^2y - 144xy^2$

$= (3x + 4y)^3 - 36xy (3x + 4y)$

$= (3x + 4y) [(3x + 4y)^2 - 36xy]$

$= (3x + 4y) (9x^2 + 24xy + 16y^2 - 36xy)$

$= (3x + 4y) (9x^2 - 12xy + 96y^2)$

De esta manera si que queda claro la explicación del porqué el cambio de signo en el segundo término en el segundo factor.

(8TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$)

7. $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x (x + 5) + 2 (x + 5)$

$= (x + 5) (x + 2)$

8. $x^2 - x - 42 = x^2 + 6x - 7x - 42$

$= x (x + 6) - 7 (x + 6)= (x + 6) (x - 7)$

9. $x^2+ 7x - 60 = x^2 + 12x - 5x - 60$

$= x (x +12) - 5 (x + 12)$

$= (x + 12) (x - 5)$

Cuál es el criterio...? descúbralo!

(Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$)

10. $4x^2 + 5x - 9 = 4x^2 + 9x- 4x - 9$

$= 4x^2 - 4x + 9x - 9$

$= 4x (x - 1) + 9 (x - 1)$

$= (x - 1) (4x + 9)$

11. $9x^2 + 2x - 7 = 9x^2 + 9x - 7x - 7$

$= 9x (x + 1) - 7 (x + 1)$

$= (x + 1) (9x - 7)$

12. $20a^2 - 7a - 40 = 20a^2+ 25a - 32a - 40$

$= 5a (4a - 5) - 8 (4a + 5)$

$= (4a + 5) (5a - 8)$

DESCUBRA EL CRITERIO!

(TRINOMIO DE CUADRADO PERFECTO)

13. $9- 6x + x^2 = 9 - 3x - 3x - x^2$

$= 3 (3- x) - x (3 - x)$

$= (3 - x) (3 - x)$

$= (3 - x)^2$

14. $400x^{10} + 40x^5 + 1 = 400x^{10} + 20x^5 - 20x^5 + 1$

$= 20x^5 (20x^5 + 1) + (20x^5 - 1)$

$= (20x^5 + 1) (20x^5 + 1)$

$= (20x^5+)^2$

CRITERIO: Se descompone el término medio en dos sumandos y se procede a resolverlo por factor común (Agrupación)

La factorización en el contexto de los exponentes racionales.

1. Factorizar : $x - 3$

   $X - 3 = (\sqrt{x} + \sqrt{3}) (\sqrt{x} - \sqrt{3})$ (se asume como diferencia de Cuadrados)

2. $x - 8 = (x^{1/3} - 2) (x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4)$

   $= (\sqrt[3]{x} - 2) (\sqrt[3]{x^2} + 2 \sqrt[3]{x} + 4)$ $\rightarrow$ se asume como diferencia de cubos

3. Desde este enfoque ; podríamos simplificar $: \frac{x - 1}{\sqrt[8]{x} + 1}$

$$\frac{x - 1}{\sqrt[8]{x} + 1} = \frac{(x^{½} + 1 (x^{½} - 1)}{x^{1/8} + 1} = \frac{(X^{1/2} + 1)(X^{¼} + 1)(X^{1/4} - 1)}{x^{1/8} + 1}$$

$$= \frac{(X^{1/2} + 1)(X^{1/4} + 1)(X^{1/8} + 1)}{X^{1/8} + 1}(x^{1/8} - 1)$$

$$= (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x^1} + 1 (\sqrt[8]{x} - 1) \text{ R/}$$

4. Simplifica: $\frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt[8]{x^1} - \sqrt[4]{2^1}}$

$$\frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt[8]{x} - \sqrt[4]{2}} = \frac{x + x^{1/2} - 2}{\sqrt[8]{x^1} - \sqrt[4]{2}} = \frac{(x^{1/2} + 2)(x^{1/2} - 2)}{\sqrt[8]{x} - \sqrt[4]{2}}$$

(Asumiendo a $x + x^{1/2} - 2$ como en trinomio de la forma $x^2 + b x + c$).

$$\frac{(x^{1/2} + 2)(x^{1/2} - 2)}{\sqrt[8]{x} - \sqrt[4]{2}} = \frac{(x^{1/2} + 2)(x^{1/4} + 2^{1/2})(x^{1/4} - 2^{1/2})}{\sqrt[8]{x^1} - \sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{(x^{1/2} + 2)(x^{1/4} + 2^{1/2})(x^{1/8} + 2^{1/4})(x^{1/8} - 2^{1/4})}{\sqrt[8]{x^1} - \sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt[4]{x} + \sqrt{2})(\sqrt[8]{x} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[8]{x} - \sqrt[4]{2})}{\sqrt[8]{x} - \sqrt[4]{2}}$$

$$= \underline{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt[4]{x} + \sqrt{2})((\sqrt[8]{x} + \sqrt[4]{2})} \quad \text{R/}$$

5. Simplificar: $\dfrac{x^2 + x + 1}{X - \sqrt{x} + 1} = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - x}{x - \sqrt{x} + 1}$

(He completado un T.C.P. en el numerador)

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - x}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(x + 1)^2 - x}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(x + 1 + \sqrt{x})(x + 1 - \sqrt{x})}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= x + 1 + \sqrt{x}. \quad R/$$

6. Simplificar: $\dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \dfrac{(x^{1/3} + 1)(x^{2/3} - x^{1/3} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}$

(a sumiendo a x + 1 como una suma de cubos).

$$\frac{(x^{1/3} + 1 (x^{2/3} - x^{1/3} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \sqrt[3]{x} + 1$$

Vistas así las cosas, la descomposición de factores adquiere otra dimensión diferente a la que estamos acostumbrados a trabajar. Veamos lo que ocurre:

7. Simplificar: $\dfrac{5}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \dfrac{10 - 5}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$

No se ha utilizado el criterio de conjugado a que estamos acostumbrados. Solo se ha considerado a 10- 5 como si fuese una diferencia de cuadrados y como no tienen raíz cuadrada exacta se deja indicada!.

SIMPLIFICACION DE RADICALES SIN UTILIZAR LA CONJUGADA

8. Simplificar: $\dfrac{19}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} = \dfrac{19 \times 2}{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) \times 2} = \dfrac{19x\,(50-48)}{(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) \times 2}$

$$= \frac{19\,(\sqrt{50} + \sqrt{48})\,(\sqrt{50} - \sqrt{48})}{2\,(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})} = \frac{19\,(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\,(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})}{2(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})}$$

$$= \frac{19\,(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})}{2}$$

Ejercicios para divertirse!.

1. Simplificar: $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[6]{x}}$

2. Simplificar : $\dfrac{x - 1}{\sqrt[8]{x} - 1}$

3. Simplificar : $\dfrac{a^2 + a + 1}{a\sqrt{a} + 1}$

4. Simplificar : $\dfrac{a + 2}{1 + {}^{2}/a}$

5. Simplificar : $\dfrac{x + 2}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4^1}}$

SOLUCION DE ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS

(Sistema de ecuaciones con dos incógnitas).

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$4x + 3y = 58 \qquad 1$$
$$5x - 6y = 25 \qquad 2$$

1. Despejemos el término que contiene a x:

$$4x = 58 - 3y \qquad 1$$
$$5x = 6y - 25 \qquad 2$$

Dividamos miembro a miembro las 2 igualdades.

$$\frac{4x}{5x} = \frac{58 - 3y}{6y - 25} \qquad 3$$

$$\frac{4}{5} = \frac{58 - 3y}{6y - 25} \qquad 4 \text{ (SIMPLIFICANDO))}$$

$$24\ y - 100 = 290 - 15\ y \qquad 5 \text{ (RESOLVIENDO)}$$

$$24y + 5y = 290 + 100$$

$$39y = 390$$

$$y = \frac{390}{39}$$

El valor de x lo encontramos cualquier de los dos igualdades propuestas.

Recuerde que los métodos de igualación ,sustitución o suma y resta lo que consiguen en un primer momento es anular una de las dos incógnitas…En Cuáles de estos métodos cree usted esté inmerso este procedimiento……