La contribución de la clase de Computación a la introducción y desarrollo de conceptos elementales de Matemática Numérica en el nivel medio.

MsC. Rubén Rodríguez Ramos

Lic. Eric Crespo Hurtado

Dr. C. Tomás Crespo Borges

Con el avance vertiginoso de los medios de computación, la utilización de la misma en diferentes ramas de la ciencia y de la técnica donde de manera general los procesos productivos y tecnológicos no están dados por modelos matemáticos "exactos", en lugar de estos, adquiere cada vez mayor importancia y significación la Matemática Numérica para la introducción de métodos eficientes que posibiliten la aplicación de métodos numéricos para situaciones del trabajo científico, resulta, por tanto, imprescindible a los estudiantes de la Enseñanza General Media tener nociones elementales sobre esta disciplina, que puedan potenciarse a través de diferentes asignaturas, pero en particular por la Computación

Para la introducción de los números irracionales, en muchos textos se emplea, en forma explicita o implícita el concepto de aproximación, un ejemplo es el libro de texto de Matemática para el décimo grado de la enseñanza media de Cuba, que en la página 100, se ilustra mediante una tabla cómo se pueden obtener valores aproximados de potencias de exponente irracional, en este caso se refiere al cálculo $3^{\sqrt{2}}$ y al final del epígrafe se plantea " *con estas ideas puedes elaborar un programa de computación que permita calcular aproximaciones decimales a cualquier potencia de exponente irracional Inténtalo*".

Indiscutiblemente la intención del planteamiento es buena y el ejemplo planteado es ilustrativo del problema, pero la programación ya no es contenido de la enseñanza en ese grado y por tanto no es posible utilizar el ejemplo, además de que en la escuela no siempre se aprovecha esta posibilidad de vincular la Matemática y la Computación para consolidar, repasar, ilustrar e incluso desarrollar conceptos de Matemática Numérica sin necesidad de introducir nuevos contenidos ni de Matemática ni de Computación.

Una alternativa de solución es el empleo de tabuladores electrónicos, en particular el EXCEL, con él se pueden introducir y/o sistematizar conceptos tales como:

- Aproximación.
- Error absoluto.
- Solución de ecuaciones por métodos aproximados.

Los siguientes problemas son ilustrativos de lo planteado:

<u>Problema 1</u>

Información:

Para la constante π, cuyo valor aproximado se corresponde con la función PI() suministrada por el EXCEL. Se le han encontrado distintas aproximaciones a lo largo de la historia las Matemáticas, tales como:

$\pi \approx \frac{9}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}$ (Vieta, 1593)

$\pi \approx \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}$ (Kochansky 1685)

$\pi \approx \frac{13}{50}\sqrt{146}$ (Specht, 1828)

$\pi \approx \frac{1}{2}\left(4 - \sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{13} - \sqrt{5}\right)$ (Hagge, 1914)

$\pi \approx \sqrt{21} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - 2$ (Hartmann, 1928)

$\pi \approx \frac{63}{25}\frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}}$ (Ramanujan, 1914)

Tarea:

Haga la tabla en EXCEL que permita calcular las distintas aproximaciones de π, así como el error absoluto respecto al valor calculado por la función suministrada PI() mediante la expresión $\left|PI() - aproximación\right|$ generando una tabla como la siguiente :

Fórmula propuesta por:	Aproximación	Error
Vieta, 1593		
Kochansky, 1685		
…….	………	……..

La primera línea de esta tabla en Excel y sus respectivos resultados se muestra a continuación:

Fórmula propuesta por..	**Aproximación**	**Error**
Vieta 1593	**=9/5+3/(5^(1/2))**	**=ABS(PI()-B2)**
Kochansky 1685		
……	**….**	**….**
Fórmula propuesta por..	**Aproximación**	**Error**
Vieta 1593	**3,141640786**	**4,81329E-05**
Kochansky 1685		
……	**….**	**….**

Evidentemente, mediante este problema, en el que se aplican conceptos matemáticos y computacionales conocidos por los alumnos se repasan, y se ilustran los conceptos de aproximación y error.

<u>Problema 2</u>

Información:

En la antigua Grecia, el gran matemático Arquímedes de Siracusa obtuvo aproximaciones de π mediante el uso de fórmulas de duplicación de los lados de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia. Para ello se dispone de las siguientes informaciones:

1. Se conoce que el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia se expresa en función del radio mediante la siguiente fórmula: $\ln = 2RSen\frac{\pi}{n}$

$2.$ El perímetro de un polígono regular de n lados se calculan por la fórmula

$p = nl$ donde l es la longitud del lado.

$3.$ La fórmula $L_n = \dfrac{2r\ln}{\sqrt{4r^2 - \ln^2}}$ expresa el lado del polígono regular circunscrito de n lados en función del radio del círculo y del lado del polígono regular inscrito del mismo número de lados.

Tarea:

Haga una tabla en EXCEL que dado el radio de la circunferencia y la cantidad de lados de un polígono , permita calcular el semiperímetro de 10 polígonos inscritos y circunscritos a dicha circunferencia obtenidos por duplicidades sucesivas del polígono original, generando la siguiente tabla:

Radio de la circunfe-rencia	**1**	**Número de lados del polígono inicial**	**4**	
Número de lados	**Longitud del lado del polí-gono regular inscrito**	**Semiperímetro del polígono circunscrito**	**Semiperímetro del polígono inscrito**	**Dife-rencia**
=D1	**=2*B1*SENO(PI()/A3)**	**=A3*((2*B1*B3)/(RAIZ(4*B1^2-B3^2)))/2**	**=A3*B3/2**	**=C3-D3**
=2*A3	**=2*B1*SENO(PI()/A4)**	**=A4*((2*B1*B4)/(RAIZ(4*B1^2-B4^2)))/2**	**=A4*B4/2**	**=C4-D4**

Si en la tabla dada se asigna al radio el valor 1 (r = 1) y distintos valores al número de lados, a medida que n aumenta, el semiperímetro del polígono circunscrito se aproxima cada vez más al semiperímeto del polígono inscrito y ambas se aproximan sucesivamente a π**,** mientras las diferencias forman una sucesión que se acerca a cero como se muestra en el siguiente ejemplo

Radio de la circunferencia	**1**	**Número de lados del polígono inicial**	**4**	
Número de lados	**Longitud del lado del polí-gono regular inscrito**	**Semiperímetro del polí-gono circunscrito**	**Semiperímetro del polígono inscrito**	**Diferencia**
4	**1,414213562**	**4**	**2,828427125**	**1,171572875**
8	**0,765366865**	**3,313708499**	**3,061467459**	**0,25224104**
16	**0,390180644**	**3,182597878**	**3,121445152**	**0,061152726**
32	**0,196034281**	**3,151724907**	**3,136548491**	**0,015176417**
64	**0,098135349**	**3,144118385**	**3,140331157**	**0,003787228**
128	**0,049082457**	**3,14222363**	**3,141277251**	**0,000946379**
256	**0,024543077**	**3,141750369**	**3,141513801**	**0,000236568**
512	**0,012271769**	**3,141632081**	**3,14157294**	**5,91403E-05**
1024	**0,006135914**	**3,14160251**	**3,141587725**	**1,4785E-05**
2048	**0,00306796**	**3,141595118**	**3,141591422**	**3,69624E-06**

En el problema anterior se dan las fórmulas y la tabla modelo; así, para el alumno hay aprendizaje de contenidos de matemática que no recibe explícitamente en la escuela media, pero su tarea es la de interpretar y transcribir y modificar las fórmulas y algoritmos, con las que repasa los contenidos de Computación, aunque el objetivo del ejercicio se orienta hacia el concepto de aproximación sucesiva.

Las sucesiones se utilizan frecuentemente para el cálculo de valores aproximados, tal es el caso de calcular la raíz n-ésima de un número a > o como se plantea en el siguiente problema:

<u>Problema 3</u>

Información:

La raíz n-ésima de un número a > 0, $\sqrt[n]{a}$ se puede calcular aproximadamente mediante la siguiente sucesión:

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_{k+1} = u_k - \dfrac{u_k^n - a}{n u_k^{n-1}}, \end{cases} \quad \text{k = 1, 2,.,,, n}$$

donde cada término se aproxima más que el anterior al valor deseado, de tal manera que si la diferencia entre dos valores sucesivos es menor que un error prefijado se detiene el algoritmo así:

Algoritmo:

Leer: número: a
índice: n
error: E
Hacer $\mu_0 = a$
Repetir

$$\mu_1 = \mu_0 - \frac{\mu_0^n - a}{n\mu_0^{n-1}}$$

imprimir μ_1

Si $|\mu_1 - \mu_o| \geq E$ **Hacer** $\mu_0 = \mu_1$

Hasta que $|\mu_1 - \mu_o| < E$

Tarea:

a) Compare la fórmula que expresa la sucesión y lo planteado en el algoritmo, identifique particularmente en el algoritmo la expresión: $\mu_{k+1} = \mu_k - \dfrac{\mu_k^n - a}{n\mu_k^{n-1}}$

b) Implemente este algoritmo en una tabla de EXCEL y establezca, además, el error que se comete utilizando esta aproximación y el cálculo directo de $\sqrt[n]{a}$ mediante la correspondiente expresión en EXCEL.

Como puede observarse en el enunciado de este problema se dan muchos detalles, porque su propósito es el de destacar los conceptos de Matemática Numérica, de esta manera la redacción que garantiza que el problema sea accesible a alumnos de la enseñanza media. Para calcular $\sqrt[3]{3}$ una propuesta de tabla es la siguiente:

RAÍZ	NÚMERO	ERROR	CÁLCULO DIRECTO
3	3		=B3^(1/A3)
APROXIMACIONES	=B3-((B3^A3-B3)/(A3*B3^(A3-1)))	=ABS(B4-B3)	
	=B4-((B4^A3-B3)/(A3*B4^(A3-1)))	=ABS(B5-B4)	
	=B5-((B5^A3-B3)/(A3*B5^(A3-1)))	=ABS(B6-B5)	
	=B6-((B6^A3-B3)/(A3*B6^(A3-1)))	=ABS(B7-B6)	
	=B7-((B7^A3-B3)/(A3*B7^(A3-1)))	=ABS(B8-B7)	
	=B8-((B8^A3-B3)/(A3*B8^(A3-1)))	=ABS(B9-B8)	
	=B9-((B9^A3-B3)/(A3*B9^(A3-1)))	=ABS(B10-B9)	
	=B10-((B10^A3-B3)/(A3*B10^(A3-1)))	=ABS(B11-B10)	

Los resultados obtenidos son:

RAÍZ	NÚMERO	ERROR	CÁLCULO DIRECTO
3	3		1,44224957
APROXIMACIONES	2,111111111	0,888888889	
	1,631784139	0,479326972	
	1,463411989	0,16837215	
	1,442554125	0,020857864	
	1,442249635	0,000304491	
	1,44224957	6,42937E-08	
	1,44224957	2,66454E-15	
	1,44224957	2,22045E-16	
	1,44224957	0	

Es posible otra solución al problema mediante una macro programada en Basic como la que se muestra a continuación para el problema dado, con los resultados correspondientes:

Texto del Subprograma escrito en Basic:

```
Sub PRUEBA()
Worksheets("Hoja1").Activate
Cells(3, 4) = Cells(3, 2) ^ (1 / Cells(3, 1))
i = 3
Do
        i = i + 1
        Cells(i, 2) = Cells(i - 1, 2) - ((Cells(i - 1, 2) ^ Cells(3, 1) -
        Cells(3, 2)) / (Cells(3, 1) * Cells(i - 1, 2) ^ (Cells(3, 1) - 1)))
        Cells(i, 3) = Abs(Cells(i, 2) - Cells(i - 1, 2))
Loop Until Abs(Cells(i, 2) - Cells(i - 1, 2)) < Cells(3, 3)
End Sub
```

Ejecución de la Macro y resultados finales

RAÍZ	NÚMERO	ERROR	CÁLCULO DIRECTO
5	9	0,001	1,55184557
APROXIMACIONES	7,200274348	1,799725652	
	5,760889173	1,439385176	
	4,610345573	1,1505436	
	3,692260635	0,918084938	
	2,963493586	0,728767049	
	2,394132487	0,569361098	
	1,970093275	0,424039212	
	1,695562912	0,274530364	
	1,574229767	0,121333145	

Aunque los procedimientos no son complejos, dado los objetivos de sólo utilizar conocimientos elementales de EXCEL, se continuará utilizando solamente tablas.

<u>Problema 4</u>

Otras aproximaciones de π que también pueden utilizarse para obtener aproximaciones sucesivas y el estudio del error son:

- Los productos de John Wallis (1616 – 1703) $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{4}{3} * \frac{4}{5} * \frac{6}{5} * \frac{6}{7} * \frac{8}{7} * \frac{8}{9} * \ldots$

Algoritmo:

Leer

error: E

PI = 1

K = 2

Repetir:

$$PI = PI * \frac{k}{k-1} * \frac{k}{k+1}$$

Imprimir 2 * PI

K = K + 2

Hasta que |PI() – PI|< E

La tabla para este caso puede ser:

PI	K	
1	2	CÁLCULO DE PI
=A2*(B2/(B2-1))*(B2/(B2+1))	=B2+2	=2*A3
=A3*(B3/(B3-1))*(B3/(B3+1))	=B3+2	=2*A4
=A4*(B4/(B4-1))*(B4/(B4+1))	=B4+2	=2*A5

Indiscutiblemente que el producto de John Wallis converge "muy lentamente" a π y sólo en la línea 495, para k = 986 aparece el primer 3.14…, con el valor **3,140001571**

- Gottfried Wilhelm Leibniz considerado uno de los mayores intelectuales del siglo XVIII calculó el valor de π mediante la serie infinita de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \cdots$$

Algoritmo:

Leer error: E

PI = 0

K = 1

Repetir:

$$PI = PI + \frac{1}{k}$$

$$K = (|K| + 2) sig(K) * (-1)$$

Imprimir 4 * PI

Hasta que |Pi() – PI|< E

La tabla que expresa el algoritmo es la siguiente:

PI	K	VALORES APROXIMADOS A PI
0	1	
=A2+1/B2	=(ABS(B2)+2)*SIGNO(B2)*(-1)	=4*A3
=A3+1/B3	=(ABS(B3)+2)*SIGNO(B3)*(-1)	=4*A4
=A4+1/B4	=(ABS(B4)+2)*SIGNO(B4)*(-1)	=4*A5

Para esta caso se puede hacer notar que los valores sucesivos se encuentran “por encima y por debajo de π”:

PI	K	VALORES APROXIMADOS A PI
0	1	
1	-3	4
0,66666667	5	2,666666667
0,86666667	-7	3,466666667
0,72380952	9	2,895238095
0,83492063	-11	3,33968254
0,74401154	13	2,976046176

Comenzando a tener “cierta convergencia” a partir de la línea 120 cuando aparecen los primeros valores “cercanos” a 3.14

0,78334902	245	3,13339607
0,78743065	-247	3,149722601
0,78338207	249	3,133528269
0,78739813	-251	3,149592526
0,78341407	253	3,133656271
0,78736664	-255	3,149466547
0,78344507	257	3,133780273
0,78733612	-259	3,149344475
0,78347511	261	3,13390046
0,78730653	-263	3,14922613

Lo más importante de las tablas anteriores es ilustrar cómo expresar mediante una tabla elemental una suma sucesiva o un producto sucesivo.

Problema 5

Análogas a las aproximaciones para obtener el valor de π, existen numerosas aproximaciones para la constante e, o número de Euler, en honor a Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Algunas de estas aproximaciones son:

- Mediante la sucesión $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Mediante la suma: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

o mejor, para no depender de n!, se da la siguiente expresión:

$$e = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{5}\cdots))))\right)$$

Con ellas se puede comparar los resultados obtenidos con el cálculo anterior y los valores calculado mediante la función **(EXP (potencia))**

<u>Problema 6</u>

Información:

Relacionada con las constantes e y π existe una fórmula de aproximación a n! conocida como fórmula de Sterling: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right)$

Tarea:

Haga la tabla que muestre el porcentaje de diferencia de esta fórmula con el resultado calculado mediante el empleo de la función FACT(número). Es decir, si designamos por FS a la fórmula de Sterling se pide calcular: $\frac{n! - FS}{n!} * 100$

El problema se podría ilustrar mediante la siguiente tabla:

n	n!	FS	d%
0	1	0	100%
–	–	–	–

N	N!	FS	D%
1	=FACT(A2)	=(A2/EXP(1))^A2*((2*PI()*A2)^(1/2)*(1+1/(12*A2)+(1/(288*A2^2))))	=(B2-C2)/B2
2	=FACT(A3)	=(A3/EXP(1))^A3*((2*PI()*A3)^(1/2)*(1+1/(12*A3)+(1/(288*A3^2))))	=(B3-C3)/B3
3	=FACT(A4)	=(A4/EXP(1))^A4*((2*PI()*A4)^(1/2)*(1+1/(12*A4)+(1/(288*A4^2))))	=(B4-C4)/B4
4	=FACT(A5)	=(A5/EXP(1))^A5*((2*PI()*A5)^(1/2)*(1+1/(12*A5)+(1/(288*A5^2))))	=(B5-C5)/B5
5	=FACT(A6)	=(A6/EXP(1))^A6*((2*PI()*A6)^(1/2)*(1+1/(12*A6)+(1/(288*A6^2))))	=(B6-C6)/B6
6	=FACT(A7)	=(A7/EXP(1))^A7*((2*PI()*A7)^(1/2)*(1+1/(12*A7)+(1/(288*A7^2))))	=(B7-C7)/B7
N	N!	FS	D%
1	1	1,00218362	-0,00218362
2	2	2,00062867	-0,00031433
3	6	6,00057815	-9,6358E-05
4	24	24,0009883	-4,1178E-05
5	120	120,002546	-2,1214E-05
6	720	720,008869	-1,2318E-05

Con el problema anterior se introduce el concepto de error relativo expresado como porcentaje.

A partir del concepto de error, aproximación y sucesión de aproximaciones se pueden introducir métodos numéricos elementales tal como se muestra en los problemas siguientes.

<u>Problema 7</u>

Información:

De la matemática superior se tiene el teorema plantea:

"Si una función es continua en un intervalo [a, b] y cambia de signo en ese intervalo entonces tiene al menos un cero en [a, b]", es decir, existe un x_c tal que

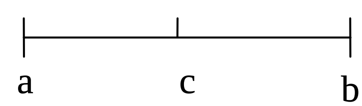
$a \leq x_c \leq b$ y $f(x_c) = 0$.

Como no siempre existe un método exacto para determinar x_c, se han elaborado métodos aproximados, basados en estos existen algoritmos que permiten calcular aproximadamente la solución deseada.

Uno de estos ***algoritmos*** es el siguiente:

- **Dar la función f(x)**
- **Dar el intervalo [a,b]**
- **Verificar que en [a,b] existe una solución:**
  si signo de f(a) $\neq$ signo f(b)
- **Dar el error máximo con que se quiere calcular la solución:** ε

Repetir $c = \dfrac{a+b}{2}$



Si signo de f(a) $\neq$ signo de f (c) entonces:
el cero (x_0) está en [a,c], por lo que el intervalo [a,b] se puede reducir a [a,c] haciendo b = c
Si no:
el cero (x_0) está en [c,b], por lo que el intervalo [a,b] se puede reducir a [c,b] haciendo: a = c

hasta que |a – b|< ε, entonces $x_c = \dfrac{a+b}{2}$

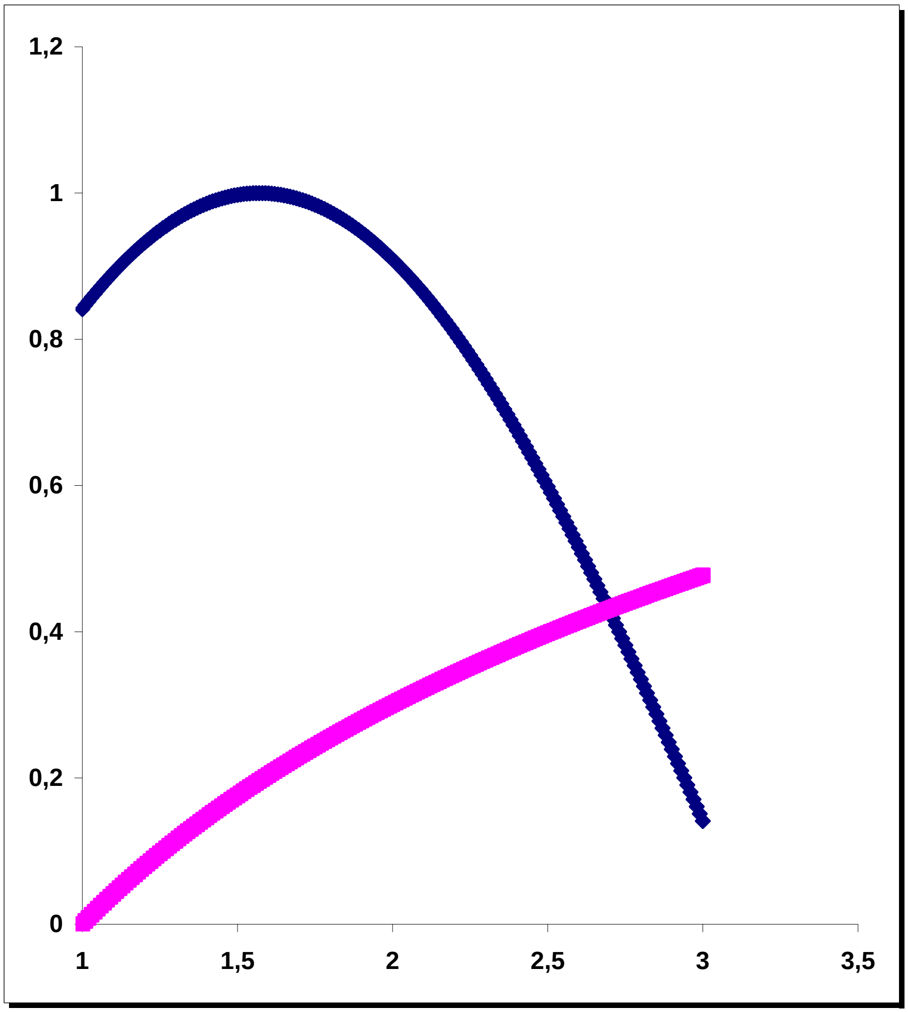
Imprimir "Solución", x_c

Ejemplo:

Resolver la ecuación sen x = log x por el método de bisección:

Una idea gráfica de la solución del problema se muestra en el gráfico de dispersión de las dos funciones en el intervalo [1;3] con un incremento de 0,01:

1	**=SENO(A1)**	**=LOG(A1;10)**	**=B1-C1**	**1**	**0,84147098**	**0**	**0,84147098**
=A1+0,01	**=SENO(A2)**	**=LOG(A2;10)**	**=B2-C2**	**1,01**	**0,84683184**	**0,00432137**	**0,84251047**
=A2+0,01	**=SENO(A3)**	**=LOG(A3;10)**	**=B3-C3**	**1,02**	**0,85210802**	**0,00860017**	**0,84350785**
=A3+0,01	**=SENO(A4)**	**=LOG(A4;10)**	**=B4-C4**	**1,03**	**0,85729899**	**0,01283722**	**0,84446176**



Evidentemente en el mencionado intervalo ambas curvas se cortan y por tanto la función f(x)= senx - log x tiene un cero, el cual se puede acotar más al intervalo [2,5 ; 3]

Siguiendo el algoritmo es posible encontrar la solución mediante la tabla cuyo encabezamiento y resultado se muestran a continuación:

a	b	ERROR	c
2,5	3	=ABS(A2-B2)	=(A2+B2)/2
=SI(SIGNO(SENO($A2)-LOG($A2;10))<>SIGNO(SENO($D2)-LOG($D2;10));A2;D2)			
	=SI(SIGNO(SENO($A3)-LOG($A3;10))<>SIGNO(SENO($D3)-LOG($D3;10));D3;B3)		
2,5	3	0,5	2,75
2,5	2,75	0,25	2,625
2,625	2,75	0,125	2,6875
2,6875	2,75	0,0625	2,71875
2,6875	2,71875	0,03125	2,703125
2,6875	2,703125	0,015625	2,6953125
2,6953125	2,703125	0,0078125	2,69921875
2,6953125	2,69921875	0,00390625	2,697265625
2,6953125	2,697265625	0,001953125	2,696289063
2,6953125	2,696289063	0,000976563	2,695800781

Tarea:

A partir del ejemplo anterior se pueden plantear tareas como:

a) ¿Por qué los cálculos se repiten hasta que $|a - b| < \varepsilon$ en el algoritmo anterior?

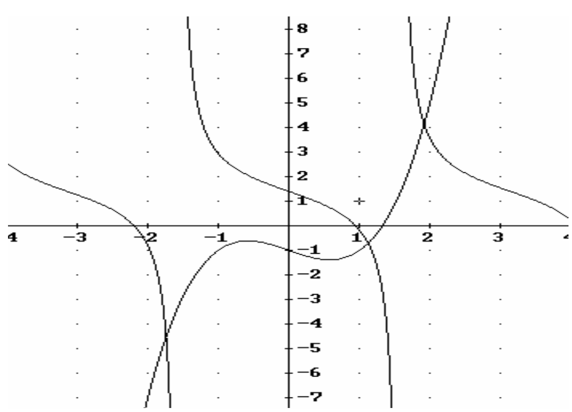
b) Repita el procesamiento hecho en la tabla para dar solución a las siguientes ecuaciones:

1) $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo [1,2]. Error menor de 0.001

2) 1,5 – tan x = 0,1 en cada uno de los intervalos [-6,-5]; [-3,-2]; [0,1]; [4,5]; [7,8]. Determine usted el error con el que desee hacer el cálculo

3) Calcule la diferencia entre los valores sucesivos determinados en el inciso anterior.

4) Sean las funciones $f(x)= x^3 - x - 1$ y $g(x)= 1,5 - \tan x$ con las que se trabaja en (1) y (2). El gráfico superpuesto de ambas funciones se adjunta. A partir de lo que observe en el mismo, las tablas elaboradas y el ejemplo, determine los puntos de intersección de ambos gráficos.



5) Observe los valores sucesivos que toma c y la cantidad de pasos necesarios para obtener cada solución.

Problema 8

La idea expresada en el problema #3 de obtener una sucesión que se “aproxime” a un valor dado, o a un valor aproximado con un error menor que ε se puede extender y aplicar a la determinación de soluciones de una ecuación por métodos iterativos, aunque no se enuncien como tal, como puede ilustrarse en el siguiente problema.

Información:

La sucesión $$x_n = \begin{cases} x_0, x_1 \\ x_{k+1} = \dfrac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases}$$

donde x_0 y x_1 (valores iniciales de la sucesión) se encuentran dentro del intervalo que contiene la solución de la ecuación definida f(x) = 0, se “acerca” cada vez más a un cero de la función, o sea, un punto x_c tal que $f(x_c) = 0$.

Aplicando esta sucesión se puede elaborar el siguiente

Algoritmo:

- **Definir función que expresa la ecuación f(x) = 0**
- **Dar dos valores “próximos” a la solución: x_0, x_1**
- **Dar el error: ε**

Repetir

$$x_2 = \frac{f(x_1) * x_0 - f(x_0)x_1}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Si $|x_1 - x_2| > \varepsilon$ entonces hacer $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$

hasta que $\left|x_1 - x_2\right| < \varepsilon$

Imprimir “Solución” x_2

Para la ecuación sen x = log x resuelta por el método de bisección la tabla puede tener para el nuevo método el siguiente encabezamiento:

x0	x1	x2	ERROR
2,60	2,90	=((SENO(B20)-LOG(B20;10))*A20-(SENO(A20)-LOG(A20;10))*B20)/((SENO(B20)-LOG(B20;10))-(SENO(A20)-LOG(A20;10)))	=ABS(B20-C20)
=B20	=C20	=((SENO(B21)-LOG(B21;10))*A21-(SENO(A21)-LOG(A21;10))*B21)/((SENO(B21)-LOG(B21;10))-(SENO(A21)-LOG(A21;10)))	=ABS(B21-C21)

Con ella se obtiene el siguiente resultado para un formato de 15 cifras decimales:

x0	x1	x2	ERROR
2,600000000000000	2,900000000000000	2,693174478887990	0,206825521112012
2,900000000000000	2,693174478887990	2,696167046003500	0,002992567115515
2,693174478887990	2,696167046003500	2,696256610986290	0,000089564982789
2,696167046003500	2,696256610986290	2,696256562716850	0,000000048269444
2,696256610986290	2,696256562716850	2,696256562717600	0,000000000000754
2,696256562716850	2,696256562717600	2,696256562717600	0,000000000000000
2,696256562717600	2,696256562717600	2,696256562717600	0,000000000000000

Compare el resultado de esta tabla con la del método de bisección y observe que en menos pasos se obtienen resultados más exactos.

Tarea:

a) Compare la fórmula dada en la sucesión con las expresadas en el algoritmo.

b) Analice por qué el ciclo se repite hasta que $|x_1 – x_2|< \varepsilon$

c) Elabore la tabla que implemente este algoritmo para darle solución a las ecuaciones dadas en el inciso (b) del problema 7. .

d) Compare los pasos requeridos para calcular las ecuaciones por el algoritmo del problema 7 y el del problema 8.

e) En el problema 7 se requiere al inicio el intervalo donde está la solución de la ecuación y el del problema 8 dos valores de ese intervalo. Combine ambos algoritmos de manera que a partir de un intervalo dado, reducirlo a un intervalo más pequeño con 5 repeticiones y después tomar dos valores de ese nuevo intervalo para ejecutar el algoritmo del problema 8.

A modo de conclusión podemos expresar que los ejemplos anteriores evidencian que en una forma sencilla e interesante es posible consolidar, repasar, ilustrar o introducir en la enseñanza media los conceptos de aproximación, error absoluto y solución de ecuaciones por métodos aproximados, los cuales son básico en la Matemática Numérica, enunciándolos como ejercicios en la clase de Computación.

BIBLIOGRAFIA

Colectivo de Autores. Keline Enzyklopedie Mathematik. Editorial Bibligraphishes Institut. Leipzig. 1985.

Conte, S.D y Carl de Boor. Elementary numerical analysis: an algorithmic approach. La Habana. Ed. Pueblo y Educación. 1984

Cuba, Ministerio de Educación. Precisiones para el trabajo Metodológico. Curso 1997-1998. La Habana. 1997

Cuba, Ministerio de Educación. Programa de Informática Educativa, período 1996-2000. La Habana. 1996

Golden , Jones T. Fortran IV. Programación y cálculo. Edición Revolucionaria. La Habana. 1965.

González , Mario O. Complementos de Aritmética y algebra. Quinto curso. Tomo I. La Habana. ED. Pueblo y Educación. 1968

Kerner I.O. Numerische Mathematik mit Kleinstrechnen. Editorial Deutscher Verlag de Wissenchalten. Dresden, 1984.

Matemática de Cálculo. N.I. Danilina y Otros. Moscú ED. MIR.1990.

McCraken, Daniel, Williams, S. Dorn. Métodos numéricos y programación Fortran. La Habana. Ed. Revolucionaria. 1967.

Mederos. María, V. Martha, L. Baguer. Matemática Numérica con microcomputadoras. MES.1987.

Suárez Alonso, Margarita. Matemática Numérica. La Habana. Ed. de libros para la Educación. 1980.

Tíjonov A. Y Kostomárov D. Conferencia de Introducción a la Matemática Aplicada. Editorial MIR. Moscú. 1987.

Torres Lima, Pastor. Influencias de la Computación en la enseñanza de la Matemática. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencia Pedagógicas. Luis Campistrous Pérez. Tutor. Santa Clara, 1997.