$\int f(x)\,dx$

En la historia de las matemáticas, los métodos integrales se elaboran, acumulan e independizan en el transcurso de la resolución de problemas sobre el cálculo de volúmenes, áreas, centros de gravedad, formándose como métodos de integración definida.

El primero de los métodos publicados apareció en el año 1615, en las obras de Kepler. Para la demostración matemática de las leyes de Kepler fue necesario utilizar las magnitudes infinitesimales.

Sin embargo, fue en su obra *Nueva estereometría de toneles de vino*, **donde Kepler expuso su método de utilización de magnitudes infinitesimales y los fundamentos para la suma de estos.**

Muchos científicos dedicaron sus trabajos al perfeccionamiento del lado operativo de esta empresa, y a la explicación racional de los conceptos que surgían.

La integración definida en forma de cuadraturas geométricas adquirió fama en la primera mitad del siglo XVII, debido a la gran cantidad de problemas que podía resolver.

Los logros en este terreno pertenecieron inicialmente a J. Bernoulli, quien escribió el primer curso sistemático de cálculo integral, publicado en 1742.

Sin embargo, fue Euler quien llevó la integración hasta sus últimas consecuencias, de tal forma que los métodos de integración indefinida alcanzaron prácticamente su nivel actual.

Johann Bernoulli

(Suiza, 1667-1748)

Johann Bernoulli es, quizás, el más famoso de una familia entera de matemáticos. Junto a su hermano Jacques, fueron después de Newton y Leibniz, los más importantes fundadores del cálculo.

Durante 1692 y 1693 los hermanos trabajaron juntos, manteniendo una rivalidad amistosa, que años posteriores se transformó en una abierta hostilidad.

La integración fue vista por Johann Bernoulli, simplemente como la operación inversa de la diferenciación y, con esta aproximación, él obtuvo muchos éxitos integrando ecuaciones diferenciales.

Sumó series y descubrió teoremas adicionales para funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Por estas excelentes contribuciones a las matemáticas logró un lugar en la Universidad de Groninga.

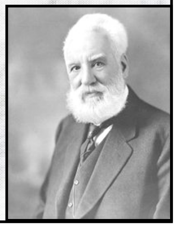
Johann Bernoulli tuvo su mayor fama en vida y fue electo como miembro de las academias de París, Berlín, Londres, San Petersburgo, Bolonia.

17

NOCIONES SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA

Nunca vayas por el camino trazado, porque conduce hacia donde otros han ido ya.

Alexander G. Bell (Escocia, 1847-1922)



1 – INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La derivada de una función **f** se ha indicado con el símbolo **f´,** que pone de manifiesto que **f´** es una función obtenida de **f** por derivación. Se indica su valor en el punto de abscisa **a** por **f´(a)**.

Esta notación fue introducida por Lagrange en el siglo XVIII. Leibniz empleó una notación algo distinta para la derivada.

La derivada se definió como el límite del cociente incremental siguiente:

$$f´:\ f´(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Recuérdese que en el capítulo 7, al Δx (incremento de la variable **x**) se lo llamo **h**.

Este límite fue designado por Leibniz como:

$$f´:\ f´(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

$$\boxed{f´:\ f´(x) = \frac{df}{dx}}$$

Leibniz considera a la derivada como el cociente de cantidades infinitesimales que llama diferenciales y las anota **dy**, **dx**. O sea que, en lugar de utilizar el paso al límite para definir la derivada, pasa del límite del cociente incremental al cociente de los diferenciales indicando con esta notación que tanto el incremento en la variable independiente como el incremento en los valores de la función se transforman en infinitésimos.

Por lo cual, la notación diferencial se debe considerar como una nueva notación de la derivada, que tiene la ventaja de poner en evidencia no solo la función que se deriva, sino también la variable respecto a la cual se deriva.

Dado que la diferencial no es más que una nueva notación para la derivada, todas las propiedades de la derivada se cumplen con la diferencial:

i) Sea **f: f(x) = x**. En la notación diferencial se obtiene que **df = dx**

ii) Sea **f: f(x) = k**. En la notación diferencial se obtiene que **df = 0**

iii) En la notación diferencial, la derivada de una suma o producto se indica así:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad\qquad \frac{d(f\times g)}{dx} = f\,\frac{dg}{dx} + g\,\frac{df}{dx}$$

iv) La derivada de la función compuesta es: si **h: h(x) = f(g(x))**

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg}\times\frac{dg}{dx}$$

Se debe tener siempre en cuenta la relación **dy = f´(x) dx**, o sea, no debe olvidarse del símbolo **dx** cuando se escriba la diferencial.

En todo el cálculo integral se usará esta notación para la derivada.

2 – DEFINICIÓN DE PRIMITIVA

Una función **F: F(x)** se llama *primitiva* o *antiderivada* de una función **f: f(x)** en $[a, b]$, si la derivada de **F** es **f**.

F es un primitiva de f $\Leftrightarrow$ **F´(x) = f(x)** $\forall\ x \in [a, b]$

3 – ALGUNOS TEOREMAS SOBRE PRIMITIVAS

Propiedad 1 *Si* **F(x)** *es una primitiva de* **f(x),** *en un intervalo* **F(x) + c** *también lo es.*

Esto es cierto, pues la diferencial de una constante es cero.

$$\frac{d(F(x)+c)}{dx} = \frac{d(F(x))}{dx} + \underbrace{\frac{dc}{dx}}_{=0} = \frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$$

Propiedad 2 *Si* **F(x)** *es una primitiva de* **f(x)**, *en un intervalo,* **k F(x)** *es una primitiva de* **k f(x)**.

Esto es cierto, por propiedad de la diferencial.

$$\frac{d(kF(x))}{dx} = \frac{k\,d(F(x))}{dx} = k\,f(x)$$

Propiedad 3 *Si* **F(x)** *y* **G(x)** *son dos primitivas de* **f(x)** *en un intervalo, su diferencia es a lo sumo una constante.*

Esto es cierto, pues si **F(x)** y **G(x)** son primitivas de **f(x) dx**, ello significa que la diferencial de su resta es cero.

$$\frac{d\left(F(x)-G(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(F(x)\right)}{dx} - \frac{d\left(G(x)\right)}{dx} = f(x) - f(x)$$

Por lo cual, a lo más pueden diferir en una constante **c**, ya que $\frac{dc}{dx} = 0$

De acuerdo con este teorema, existen infinitas primitivas de una función dada, las cuales difieren en una constante.

4 – DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA

Al conjunto de todas las primitivas de una función **f** en un intervalo, se le llama integral indefinida de **f** y se anotará como: $\int f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = \{F' \,/\, F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]\}$

Si **F** es una primitiva de **f** en **[a, b]** es posible anotar:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}}$$

5 – PROPIEDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

$$\mathbf{d}\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

Esto es inmediato, por la definición de integral indefinida. O sea que la integral indefinida de una diferencial **f(x) dx** es una función $F(x) = \int f(x)\,dx$ tal que su diferencial $\mathbf{d}\left(F(x)\right) = \mathbf{d}\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$ es $f(x)\,dx$.

También es cierto que $\int \mathbf{d}\left(F(x)\right) = F(x) + c$, pues la integración y la diferenciación son operaciones inversas. De modo que la aplicación de diferenciación e integración (integración - diferenciación) no altera la función original, a lo más que en una constante.