Cálculo infinitesimal

El nacimiento de cálculo, ubicado en el siglo XVII y atribuido a Newton y Leibniz, permite señalar que ellos son considerados los inventores del cálculo, ya que dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores Barrow y Fermat la algorítmica y precisión necesarias y en definitiva establecen la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Los procedimientos de Barrow y Fermat estuvieron elaborados con base en los trabajos de Torricelli, Cavalieri, Galileo, Kepler, Valerio y Stevin, que fueron también consecuencia de las contribuciones de Oresme, Calculator, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente, los trabajos de estos últimos fueron influenciados por los problemas matemáticos y filosóficos planteados por Aristóteles, Platón, Zenón y Pitágoras. Así, sin el trabajo previo de estos hombres no hubiese existido el cálculo infinitesimal.

Newton desarrolló su obra esencial sobre la base de series de potencias, ya que con ellas podía expresar curvas complicadas como la suma de curvas sencillas.

Leibniz, por su parte, se preocupó por clarificar los conceptos y darle la formalidad matemática requerida a los nuevos algoritmos. Elaboró la simbología, entre ellas la del signo de integral.


Gottfried Leibniz (Alemania, 1646-1716)


Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727)

Con Riemann, que tomó las enseñanzas de Dirichlet y Lejeune, la integral adquirió una extensión todavía mayor. Amplió la idea de Cauchy y extendió la integral a funciones acotadas con un número infinito de discontinuidades en un intervalo cualquiera. Ideó una noción más general de la suma, con la que se permitió definir su integral.

Darboux generalizó la integral de Riemann y de ella surge lo que hoy se conoce como la regla de Barrow.

La integral de Lebesgue es una construcción que extiende el concepto de integral a una clase más amplia de funciones.


Georg B. Riemann (Alemania, 1826-1866)


Henri L. Lebesgue (Francia, 1875-1941)

16

NOCIONES SOBRE INTEGRAL DEFINIDA

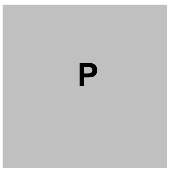
Cometer un error y no corregirlo es otro error.

Confucio
(China,
551-479 a.C.)

1 – INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El área de la región **R** es:
área(R) = largo × ancho

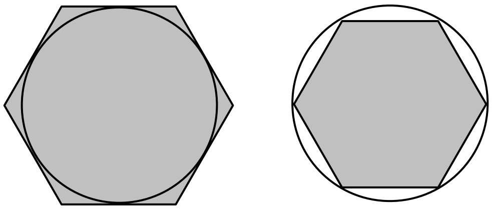
En la geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, como por ejemplo el rectángulo o el cuadrado.



El área de la región **P** es:
área(P) = lado × lado

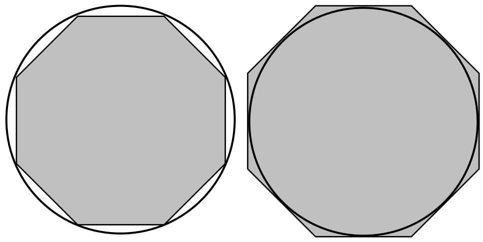
Un problema más difícil es asignar el área a una región limitada por una curva.

El método griego del *agotamiento* consiste en inscribir polígonos en una figura, y aumentar el número de los lados de los polígonos y hallar el área buscada. Eudoxo (Asia Menor 408-355 a.C.) consiguió de esta manera encontrar la fórmula para calcular el área de un círculo.



Con polígonos regulares de 6 lados.

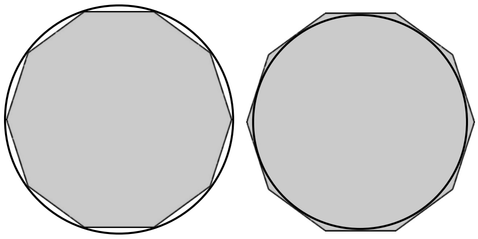
Teniendo en cuenta el uso de este método dado por Eudoxo, se lo conoce como método de *exhaución de Eudoxo*.



Con polígonos regulares de 8 lados.

Este método fue empleado tiempo después por Arquímedes (Siracusa, 287-212 a.C.) para dar una aproximación del valor de π, quien no solo consideró polígonos inscritos, sino también polígonos circunscritos. Es fácil darse cuenta de que, a medida que aumenta el número de lados, el área de ambos polígonos inscritos y circunscritos se acerca al valor del área del círculo. Arquímedes consideró estos hechos y calculó el área de los polígonos, uno de ellos inscrito y el otro circunscrito, hasta **96** lados, y obtuvo para el número π el resultado:

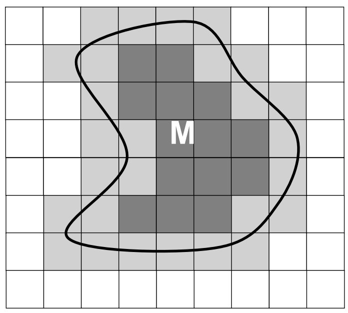
$$3{,}14084507\ldots < \pi < 3{,}14285714\ldots$$



Con polígonos regulares de 10 lados.

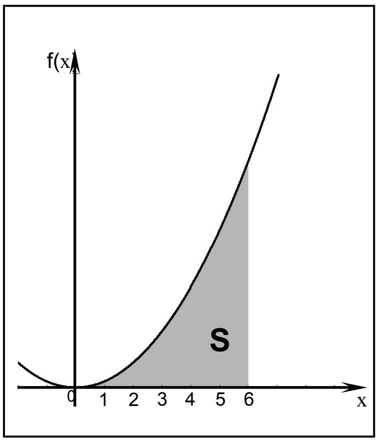
Si una región **M** del plano no es un polígono regular, no está claro cómo puede asignársele un área.

Sin embargo, si se coloca dicha región sobre una hoja de papel cuadriculado en que cada cuadradito tiene por área una unidad, es posible aproximar por defecto el área de **M**, contando los cuadraditos oscuros (incluidos completamente dentro de la frontera curva). Y aproximando por exceso el área de **M** contando los cuadraditos grises (que contienen alguna parte de la frontera curva). El área real limitada por la curva debiera estar entre estos dos números.

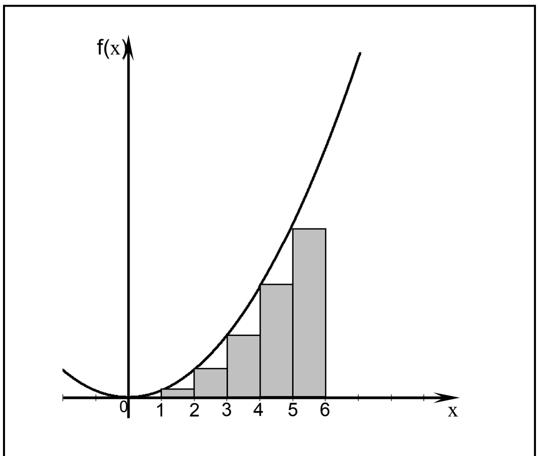


Si se repite el procedimiento sobre un papel de cuadraditos más pequeños, es posible obtener una aproximación mejor al área buscada.

2 – INTRODUCCIÓN GEOMÉTRICA

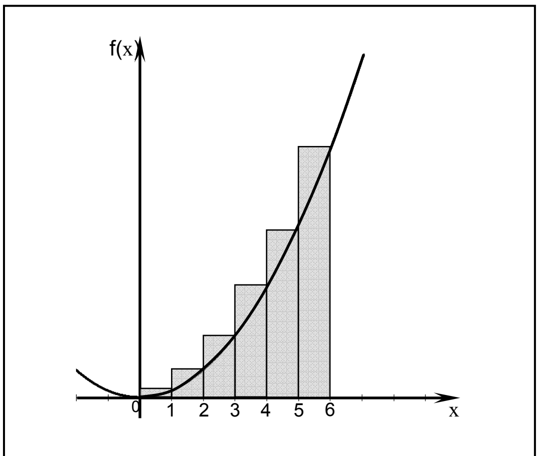


Para ilustrar: considérese la región **S** limitada por la representación gráfica de la función **f: f(x) = x²**, el eje $\overrightarrow{ox}$ y las rectas verticales **x = 6** y **x = 0** sombreada en la figura.



Si se divide el intervalo [0,6] en 6 subintervalos de longitud unidad y se considera los rectángulos inscritos (interiores) a la región **S**, la suma de sus áreas viene dada por:

$$a(S) = 1(1^2) + 1(2^2) + 1(3^2) + 1(4^2) + 1(5^2) = 55$$



Si ahora se consideran los rectángulos circunscritos (exteriores) a la región **S**, la suma de sus áreas viene dada por:

$$A(S) = 1(1^2) + 1(2^2) + 1(3^2) + 1(4^2) + 1(5^2) + 1(6^2) = 91$$

Si cada subintervalo se subdivide a su vez, se obtiene una nueva aproximación, con un mayor número de rectángulos. Puede demostrarse que la diferencia entre las sumas **A(S)** del área de los rectángulos exteriores y las sumas **a(s)** del área de los rectángulos interiores puede hacerse tan pequeña como se quiera. Por lo cual es lógico pensar que el área de la región **S** cumple que: **a(S) < área(S) < A(S)**

La suma de las áreas de los rectángulos interiores aumenta y **área(S)** es el extremo superior del conjunto de aproximaciones por defecto. Este existe, ya que se trata de un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente (cada suma de áreas de rectángulos exteriores es una cota superior).

La suma de las áreas de los rectángulos exteriores decrece y **área(S)** es el extremo inferior del conjunto de aproximaciones por exceso. Este existe, ya que se trata de un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente (cada suma de áreas de rectángulos interiores es una cota inferior).

De esta manera se puede lograr el área del segmento parabólico, con el grado de aproximación que se desee, sin más que tomar las subdivisiones del intervalo $[0,6]$ tan pequeñas como se quieran.