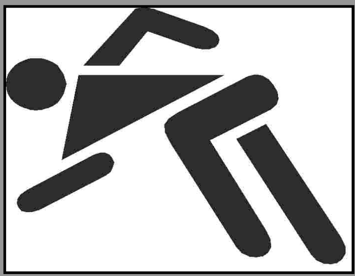


Un ejemplo histórico sobre el tema de este capítulo fue planteado hace unos dos mil cuatrocientos años, cuando el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. C.) estableció la siguiente paradoja, llamada frecuentemente la paradoja del corredor.

Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que correr la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de esta, le quedará todavía la cuarta parte, cuando haya corrido la mitad de esta cuarta parte, le quedará la octava parte y así sucesivamente indefinidamente. Puesto que para recorrer por separado cada una de estas se necesita una cantidad positiva de tiempo, parece natural afirmar que el tiempo necesario para el trayecto total ha de ser la suma total de todas estas cantidades de tiempo. Decir que el corredor nunca puede alcanzar la meta equivale a decir que nunca llega a ella en un tiempo finito; o, dicho de otro modo, que la suma de un número infinito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

La afirmación de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita, fue contradicha dos mil años más tarde, con la teoría de las series infinitas. En los siglos XVII y XVIII algunos matemáticos empezaron a pensar que en algunos casos la suma de un conjunto de infinitos números positivos puede ser finita. Entre los primeros matemáticos que se ocuparon de las series tiene un lugar preeminente Leonard Euler. Poco después de la muerte de Euler en 1783, el caudal de nuevos descubrimientos empezó a disminuir y un primer período en la historia de las series llegó a su término. Una nueva etapa comenzó en 1812 cuando Gauss publicó un estudio riguroso de la convergencia de algunas series infinitas. Pocos años más tarde, Cauchy expuso los fundamentos de la teoría moderna de convergencia y divergencia, en su tratado *Curso de análisis algebraico,* **publicado en 1821.**

Carl Friedrich Gauss

(Alemania, 1777 - 1855)

Hijo de un humilde constructor, Gauss dio señales de ser un genio antes de que cumpliera los tres años. A esa edad aprendió a leer y hacer cálculos aritméticos mentales con tanta habilidad que descubrió un error en los cálculos que hizo su padre para pagar unos sueldos. Cuando tenía doce años, criticó los fundamentos de la geometría euclidiana; a los trece le interesaba las posibilidades de la geometría no euclidiana. A los quince, entendía la convergencia y probó el binomio de Newton.

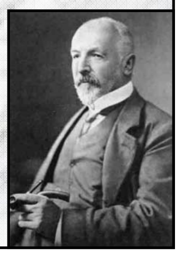
Pero la matemática no fue el único tema que le interesó: fue también astrónomo, físico, geodesta e inventor. Hablaba con facilidad varios idiomas e inclusive dominó el ruso a la edad de sesenta años. En 1807 fue nombrado director del observatorio y profesor de astronomía en la Universidad de Gotinga.

Durante su vida se reconoció que era el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX. Su obra en las matemáticas contribuyó a formar una base para encontrar la solución de problemas complicadísimos de las ciencias físicas y naturales.

15

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS SERIES

Lo veo, pero no lo creo.



G. Cantor (Rusia, 1854-1918)

1 – DEFINICIONES

Dada una sucesión infinita de números reales:

$$\{a_n\} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ \ a_n,\ \dots\}$$

es posible formar una nueva sucesión, que anotaremos como $\{S_n\}$, del siguiente modo:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$$

$$\boxed{\{S_n\} = \{S_1,\ S_2,\ S_3, \dots\ S_n,\ \dots\}}$$

$n \in \mathbb{N}$

En todo el desarrollo del libro y en especial en este capítulo, la letra n representa un número natural.

$\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

La nueva sucesión así creada $\{\mathbf{S_n}\}$ se llama *serie infinita*, o simplemente, *serie*.

Es común que se indique $\{\mathbf{S_n}\}$ con la notación: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ o en forma más abreviada, dando por conocidos los extremos se escribirá: $\sum \mathbf{a_n}$

Con ello se quiere recordar que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ se obtiene a partir de la sucesión a_n por sumas de términos sucesivos.

Téngase en cuenta que por un lado se tienen los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ de la sucesión original $\{a_n\}$ y por otro los números: $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ que son los elementos de $\{S_n\}$ y se denominan las *sumas parciales* de la serie.

Una serie es una sucesión de sumas parciales.

2 – CÁLCULO DE LOS TÉRMINOS DE $\{a_n\}$

Se ha indicado que una serie infinita se especifica por lo general dando los términos de la sucesión original, a partir de los cuales se pueden calcular las sumas parciales. Sin embargo, si se conocen las sumas parciales de una serie, también es posible encontrar los términos de esta, o sea, los elementos de la sucesión original. Se tendrá:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= S_1 \\
a_2 &= S_2 - a_1 = S_2 - S_1 \\
a_3 &= S_3 - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2 \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_n &= S_n - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}
\end{aligned}
$$

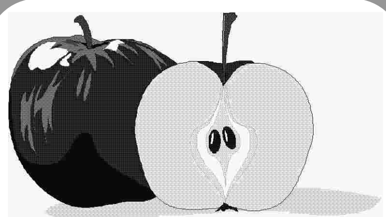
Antes de continuar, es conveniente hacer el ejercicio 335, de la página 334.

3 – SUMA DE UNA SERIE

3.1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

En los siglos XVII y XVIII algunos matemáticos empezaron a pensar que era posible extender la idea de suma ordinaria de elementos de un conjunto finito de números a conjuntos infinitos, de manera que en algunos casos, la «suma» de un conjunto infinito de números sea finita.

A partir de la suma parcial enésima se estudiará el comportamiento de la serie cuando **n** toma valores cada vez más grandes. En particular, se trata de determinar si las sumas parciales tienden o no a un límite finito cuando **n** crece indefinidamente.



Tres personas A, B, y C dividen una manzana de la siguiente manera. Primero en cuartos y cada uno toma un cuarto. Después dividen la cuarta parte sobrante en cuartos y cada uno toma uno, y así sucesivamente.

¿Cuánto obtiene cada uno de la manzana?

Véase el resultado en la página 393.

3.2. LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN (visto en el capítulo anterior)

Una sucesión $\{a_n\}$ indefinida de números reales tiene el límite **b**, si cumple la siguiente definición.

Una sucesión que tiene límite finito se llama *convergente*.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b \iff \text{Dado } \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^* \ / \ \forall\ n>n_0 \quad a_n\in E(b,\varepsilon)$$

Dado un ε positivo y arbitrario, existe un $\mathbf{n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*}$ tal que para todo $\mathbf{n>n_0}$ se cumple que $\mathbf{a_n\in E(b,\varepsilon)}$.

3.3. LÍMITE INFINITO DE UNA SUCESIÓN (visto en el capítulo anterior)

Si los términos de la sucesión llegan a conservarse superiores a cualquier número, se dice que la sucesión tiene límite infinito.

Una sucesión que tiene límite infinito se llama *divergente*.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \text{Dado } k>0 \ \exists\ n_0(k)\in\mathbb{N}^* \ / \ \forall\ n>n_0 \quad a_n>k$$

O sea, que si dado un número cualquiera $\mathbf{k>0}$, existe un $\mathbf{n_0(k)\in\mathbb{N}^*}$ tal que para todo $\mathbf{n>n_0}$ resulta $\mathbf{a_n>k}$, el límite de la sucesión es $\mathbf{+\infty}$.

Ello implica que existen infinitos términos de la sucesión que son mayores que **k** y que los términos menores que **k** son finitos.

3.4. SUMA DE UNA SERIE

Del mismo modo se dirá que si la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales tiene límite finito **S**, entonces es convergente, o sea que converge a **S**.

Al valor finito **S** se le llama *suma de la serie* y se anota:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

o, en forma abreviada: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

En las series convergentes, el símbolo:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

se utiliza para indicar tanto la serie como su suma o límite, a pesar de ser cosas conceptualmente distintas.