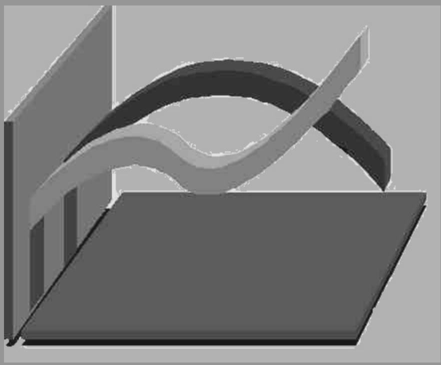


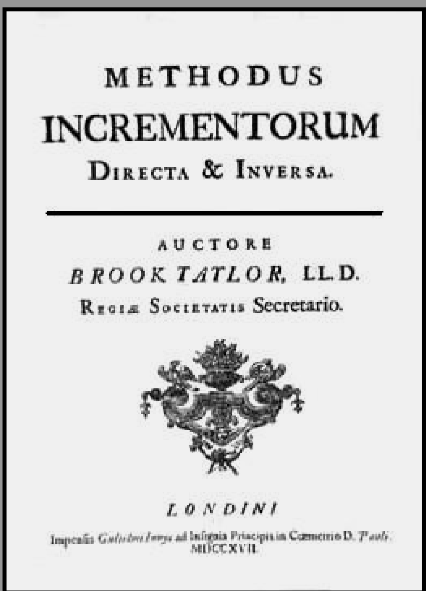
La aproximación de una función por un polinomio es una de las ideas más antiguas en el análisis numérico y es una de las más usadas aún en la actualidad. Las razones más importantes para ello son posiblemente que:

1) Los polinomios son las funciones más fáciles para calcular, porque implican solo las tres operaciones aritméticas: suma, resta y multiplicación.

2) Los ceros de una ecuación polinómica aparecen con mayor facilidad que para otras funciones.

3) Toda función continua puede aproximarse por polinomios.

Con todo esto no es difícil explicar la popularidad de los polinomios como aproximación a otras funciones más difíciles.



METHODUS
INCREMENTORUM
DIRECTA & INVERSA.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL.D.
REGIÆ SOCIETATIS Secretario.

LONDINI
Impensis Gulielmi Innys ad Insignia Principis in Cœmeterio D. Pauli. MDCCXVII.

Brook Taylor

(Inglaterra, 1685-1731)

Se graduó en Cambridge en 1709, pero aun antes, en 1708, escribió su primer trabajo importante en matemática. Este no fue publicado hasta 1714, cuando siendo miembro de la Royal Society fue elegido secretario, e integró un comité para la adjudicación de las demandas de Newton y de Leibniz por haber inventado el cálculo.

El período entre 1714 y 1718, en que tuvo que dejar la secretaría por razones de salud, es considerado el más importante con respecto a sus aportes en matemática.

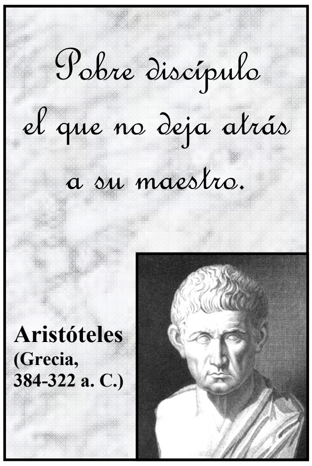
Dos libros publicados en 1715, *Methodus incrementorum directa et inversa* y *Linear Perspective,* son fundamentales en la historia de las matemáticas.

En el primero apareció por primera vez la célebre fórmula conocida como serie de Taylor. Pero no se debe pensar que Taylor era el único matemático que trabajaba en este tema; Newton, Leibniz, Bernoulli y Moivre, en forma independiente, también descubrieron variantes al teorema de Taylor. La importancia de esta fórmula no fue reconocida hasta 1772, cuando Lagrange proclamó los principios básicos del cálculo diferencial.

13

POLINOMIO DE TAYLOR

DESARROLLOS DE MAC LAURIN



Aristóteles
(Grecia,
384-322 a. C.)

1 – INTRODUCCIÓN

1.1. DERIVADAS SUCESIVAS

Dada una función **f**, su derivada **f´** también es una función de x, y puede, a su vez, tener una derivada.

La derivada de **f´**, es decir, la derivada de la derivada de **f**, se llama como ya se vio anteriormente, derivada segunda de **f** y se indica con la notación **f"**.

Esta derivada segunda de **f**, que es a su vez función de x, podrá tener una derivada que llamaremos derivada tercera de **f**.

Análogamente se definen las demás *derivadas sucesivas* de una función **f**. La derivada de orden **n** se indica por $f^{(n)}$.

1.2. EXPRESIÓN DE UN POLINOMIO EN POTENCIAS DE $(x-a)$

Para expresar un polinomio **P(x)** de grado **n** en potencias de $(x-a)$, donde **a** es un número real cualquiera, se escribirá:

$$P(x) \equiv c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n$$

El estudiante debe comprender que esta no es la forma reducida del polinomio, pero sí la adecuada para el tema que se desarrolla. Para determinar los coeficientes: c_0, c_1, c_2,... c_n es necesario derivar **P(x)** **n** veces, y cada vez hallar el valor numérico respectivo para $x = a$. Se comienza por calcular **P(a)**.

$$
\begin{array}{llll}
 & P(a)=c_0 & \rightarrow & c_0 = P(a) \\
P'(x) \equiv c_1 + 2.c_2(x-a) + 3.c_3(x-a)^2 + \dots \ + n.c_n(x-a)^{n-1} \Rightarrow & P'(a)=c_1 & \rightarrow & c_1 = \dfrac{P'(a)}{1!} \\
P''(x) \equiv 2.c_2 + 3.2.c_3(x-a) + \dots \ + n(n-1).c_n(x-a)^{n-2} \Rightarrow & P''(a)=2c_2 & \rightarrow & c_2 = \dfrac{P''(a)}{2!} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
P^{(n)}(x) \equiv (n-1)(n-2)\dots.3.2.c_n \Rightarrow & P^{(n)}(a)=n!c_n & \rightarrow & c_n = \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}
\end{array}
$$

Al sustituir los coeficientes por sus valores en función de las **n** derivadas, el polinomio se expresa como:

$$\boxed{P(x) \equiv P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

EJEMPLO: Expresar el polinomio $\mathbf{P(x) \equiv x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 5}$ en potencias de $\mathbf{(x-2)}$.

Para expresar un polinomio de grado **n** en potencias de $\mathbf{(x-2)}$, se debe calcular el valor numérico del polinomio y de sus **n** primeras derivadas, en $\mathbf{x=2}$. Luego se aplica la expresión deducida en el razonamiento anterior.

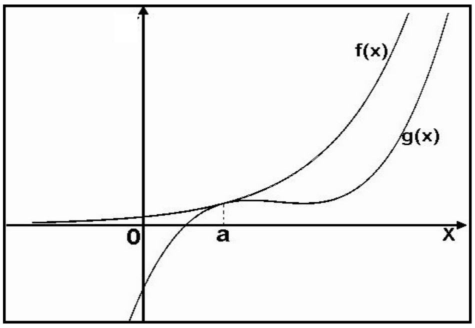
$$
\begin{array}{lll}
P(x) \equiv x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 5 & \rightarrow & P(2) = -7 \\
P'(x) \equiv 4x^3 - 6x^2 - 2x + 1 & \rightarrow & P'(2) = 5 \\
P''(x) \equiv 12x^2 - 12x - 2 & \rightarrow & P''(2) = 22 \\
P^{(3)}(x) \equiv 24x - 12 & \rightarrow & P^{(3)}(2) = 36 \\
P^{(4)}(x) \equiv 24 & \rightarrow & P^{(4)}(2) = 24
\end{array}
$$

$$\boxed{P(x) \equiv -7 + \frac{5}{1!}(x-2) + \frac{22}{2!}(x-2)^2 + \frac{36}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4}$$

El estudiante debe hacer las cuentas necesarias y verificar que el polinomio obtenido es idéntico al polinomio propuesto en la letra del ejemplo.

Antes de continuar, es conveniente hacer los ejercicios 318 y 319, de la página 296.

1.3. ORDEN DE CONTACTO



Las representaciones gráficas de dos funciones **f** y **g** tienen en $x = a$ un *contacto de orden n* entero, si en ese punto tienen igual valor numérico las derivadas de ambas funciones, hasta la de orden **n** inclusive, y además **f(a) = g(a)**.

Si **n** es par se dice que tienen un contacto de orden par y las dos representaciones gráficas se atraviesan en el punto considerado.

Si **n** es impar, se dice que tienen un contacto de orden impar y las representaciones gráficas de las funciones no se atraviesan en el punto considerado.

Dada una función **f,** se llama *osculatriz* de **f** en $x = a$ a aquella función, de una familia dada, que tiene el contacto de orden más elevado con **f**, en ese punto.

2 – POLINOMIO DE TAYLOR

Se intenta resolver el problema de aproximar una función **f** en un entorno de **a** mediante un polinomio, que tenga el contacto de grado más elevado, **polinomio osculador**, y hallar el orden de magnitud del error que se comete con esta aproximación.

Si **f** *es una función definida en un entorno de* **a** *y con derivadas sucesivas finitas en* **a** *hasta la enésima, es posible encontrar un polinomio y uno solo que coincida con* **f** *y sus primeras* **n** *derivadas en* $x = a$.

Para ello se usará el polinomio expresado en potencias de $(x - a)$.

$$P(x) \equiv P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinomio debe satisfacer las $n + 1$ condiciones siguientes, para ser el polinomio osculador de **f** en $x = a$.

$P(a) = f(a)$ $\quad P'(a) = f'(a)$ $\quad P''(a) = f''(a)$ $\quad P^{(3)}(a) = f^{(3)}(a) \ldots$ $\quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Por lo cual, al sustituir los anteriores valores numéricos se obtiene:

Polinomio de Taylor

$$P(x) \equiv f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este es el único polinomio de grado **n** que satisface las condiciones exigidas. Se le llama **polinomio de Taylor**. Expresado con más exactitud, es el polinomio de Taylor de grado **n** generado por **f** en $x = a$. **Es la mejor aproximación a f por un polinomio de grado n en un entorno de a.**