Extraído de:
Vasco, C. E. (1999). *Las matemáticas escolares en el año 2010*.
Conferencia dictada en el X CIAEM, Maldonado, Uruguay.

«[...] Las calculadoras van a ser cada vez más frecuentes, y cada vez más poderosas y complicadas de manejar.

[...] Por eso veo que los estudiantes van a llevar a los colegios y a los liceos calculadoras cada vez más complejas a un precio mucho menor que un libro de texto y mucho más útiles que un libro de texto. Por lo tanto, vamos a tener que cambiar esa idea de que si los estudiantes usan calculadoras, no van a aprender las operaciones con papel y lápiz, porque nosotros mismos ya no las hacemos tampoco con papel y lápiz; seamos consecuentes y dejemos que ellos utilicen también los elementos que están a su disposición.

[...] Las calculadoras descargan la atención y el esfuerzo mental que se necesita para hacer operaciones, para poder concentrarnos en comprender las relaciones y encontrar las estrategias de solución, para tratar situaciones problemáticas interesantes y útiles.

[...] Recuerden ustedes que en nuestro tiempo se consideraba que los alumnos más inteligentes eran los que sabían álgebra y cálculo; y si, además, jugaban ajedrez, eran más inteligentes todavía. Pues hoy día cualquier computadora con un programa de matemática o con un juego de ajedrez de varios niveles le gana en hacer ejercicios de álgebra y de cálculo, y, por supuesto, en jugar ajedrez, a cualquier estudiante, por más brillante que sea. Entonces, ¿qué significa ahora ser inteligentes? ¿Ser como una computadora? No lo creo. Tenemos que cambiar nuestra idea de que el alumno que es hábil para el juego del álgebra, o sea, para ese tradicional juego simbólico de términos y ecuaciones, sin necesidad de entenderlo, o que sea muy bueno para el juego simbólico de las identidades trigonométricas, o para el juego simbólico del cálculo, ese es el más inteligente del curso. Ese ya no es tan inteligente, pues ni siquiera llega a la inteligencia de una computadora, que es bastante estúpida de por sí. Cambiemos nuestra noción de los alumnos inteligentes en matemáticas, pensando en que aun nosotros mismos ya no le podemos ganar al ajedrez a una computadora si le subimos suficientemente el nivel de dificultad al programa. Ponernos a competir con la computadora en lo que ella hace mejor que nosotros no es mostrar mucha inteligencia. Saber programarlas para que le ganen a uno al ajedrez, eso sí es inteligencia, pero esta inteligencia no se desarrolla con los juegos meramente simbólicos del álgebra tradicional, como se creía. Entonces aparece la necesidad de aprender a pensar para salirle adelante a la computadora, aprender a programarla y aprender a interpretar lo que está en la pantalla o sale de la impresora».

11

ESTUDIO ANALÍTICO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí.

Confucio
(China, 551-479 a.C.)

1 – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1.1. INTRODUCCIÓN

La geometría analítica aclara el concepto de función a través de su representación gráfica. Se usa la notación **Gra(f)** para indicar la representación gráfica de **f**. La determinación de puntos de la gráfica da una idea de la variación de la función, pero por muchos que sean, es arriesgado unirlos con un trazo continuo, sin un previo estudio.

El estudio analítico y representación gráfica **(EAyRG)** dará propiedades fundamentales (existencia, asíntotas, crecimiento, etc.) que facilitan el trazado, a tal grado que bastará con determinar unas pocas características notables para efectuar un dibujo muy aproximado al real.

Al hablar de la representación gráfica de una función, la supondremos en un sistema de coordenadas rectangulares, donde las abscisas (eje horizontal) corresponden a valores de x y las ordenadas (eje vertical) corresponden a los valores de $f(x)$ (véase página 31).

1.2. ESQUEMA A SEGUIR

El esquema a seguir en el estudio analítico y representación gráfica de una función es, en la mayoría de los casos, el siguiente:

1) **Dominio** de la función.

2) **Límites laterales** en los puntos donde la función no está definida o en los extremos de los intervalos donde la función no está definida.

3) **Ceros, signo** y punto de corte con el eje $\overrightarrow{oy}$.

4) **Ramas infinitas**, cuando $x \to +\infty$ y/o $x \to -\infty$ si la función está definida, y estudio de asíntotas horizontales y oblicuas.

5) **Derivada primera,** crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

6) **Estudio de puntos singulares**, si los hay.

7) **Estudio de tangentes**, si es necesario, en puntos de detención.

8) **Derivada segunda**, concavidades, puntos de inflexión y sus tangentes.

Antes de comenzar el estudio del dominio de funciones que contengan las expresiones **valor absoluto**, **signo f(x)**, es conveniente separarlas en intervalos. Un ejemplo de ello se verá en las páginas 269 y 276.

2 – DOMINIO

Para determinar el dominio de una función es necesario estudiar sus condiciones de existencia y, para ello, es necesario analizar la estructura operativa de su fórmula.

2.1. ALGUNAS CONDICIONES DE EXISTENCIA DE UNA FUNCIÓN

A) **Todo denominador debe ser distinto de cero,** pues en ningún conjunto numérico está definida la división entre cero. Se deben hallar los ceros de todos los denominadores. Estos valores de x no pertenecen al dominio de la función. En la representación gráfica de la función se indica la no existencia trazando una recta vertical por el valor de x hallado.

Véanse los ejemplos de las páginas 257 y 263.

$$h: h(x) = \frac{f(x)}{\mathbf{g(x)}}$$

$$\mathbf{g(x) \neq 0}$$

B) **Toda cantidad subradical de índice par (generalmente raíces cuadradas) debe ser mayor o igual que cero.** No existen en los números reales las raíces cuadradas de números negativos. Se hallan los ceros de la cantidad subradical, se asigna el signo de la cantidad subradical y se elimina de la representación gráfica (tachando) toda la zona que corresponde a valores negativos.

Véase el ejemplo de la página 259.

$$h: h(x) = \sqrt{\mathbf{g(x)}}$$

$$\mathbf{g(x) \geq 0}$$

NOTA

Es común que el estudiante se equivoque con raíces cúbicas. Estas existen para todo valor de x.

Véase el ejemplo de la página 261.

C) **Todo logaritmando debe ser mayor que cero**. Se hallan los ceros del logaritmando y el signo, y se elimina de la gráfica (tachando) toda la zona que corresponde a valores negativos.

Véase el ejemplo de la página 266.

$$h: h(x) = L(\mathbf{g(x)})$$

$$\mathbf{g(x) > 0}$$

NOTA

Las condiciones de existencia anteriores son las más comunes que aparecen en la enseñanza media. No son las únicas.

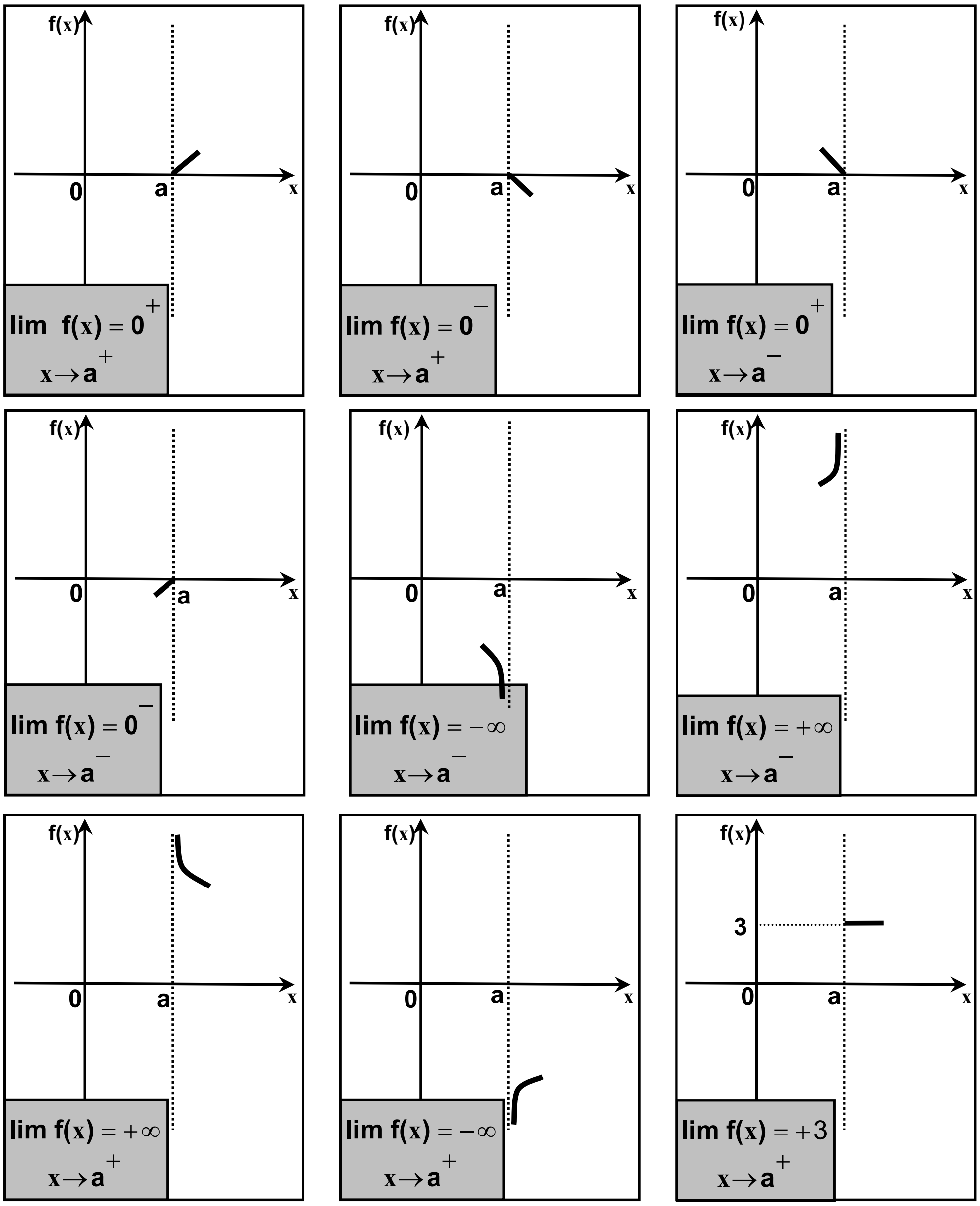
Por ejemplo:

g: g(x) = arcsen f(x) **D(g) =** $\{x \,/\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1\}$

3 – LÍMITES LATERALES

Se calculan los límites laterales en los puntos donde la función **no está definida** o en los extremos de los intervalos donde la función **no está definida,** (véase en el punto 2. **Dominio**).

Interpretación geométrica de los resultados



NOTA

En algunos casos, el cálculo del límite lateral puede dar un número finito distinto de cero. En el último caso dibujado arriba se indica cómo representarlo.