Máximos y mínimos

A menudo la vida nos enfrenta con el problema de encontrar el mejor modo de hacer algo. Una de las aplicaciones más útiles e interesantes de la derivada es el estudio y determinación de los valores máximos y mínimos de una función.

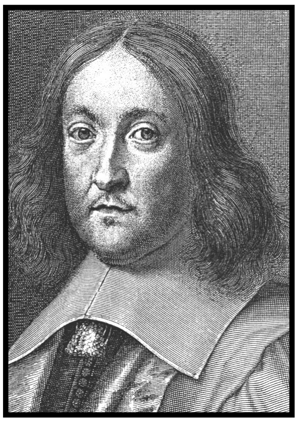
La solución al problema de hallar extremos de una función tiene aplicación inmediata en distintas actividades del ser humano. Por ejemplo, en geometría interesa maximizar áreas y volúmenes; en física, minimizar distancias o tiempos; en economía se busca minimizar costos y maximizar las ganancias.

Algunas veces, un problema de esta naturaleza puede formularse de tal manera que involucre maximizar o minimizar una función sobre un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proveen una poderosa herramienta para resolver el problema.

En realidad, los rudimentos del cálculo diferencial fueron en principio desarrollados cuando Fermat intentó encontrar métodos generales para determinar máximos y mínimos.

Pierre de Fermat

(Francia, 1601-1665)



Fermat fue abogado y concejal del Rey en el Parlamento de Toulouse. Las matemáticas eran para él un hobby.

En 1636, Fermat propuso un sistema de geometría analítica similar al que Descartes planteó unos años después. El trabajo de Fermat se basó en una reconstrucción del trabajo de Apolonio usado en el álgebra de Viète. Similar trabajo deja Fermat al descubrir métodos de diferenciación e integración encontrando los máximos y mínimos.

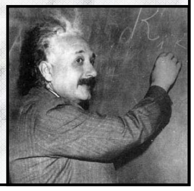
Logró rápidamente una gran reputación como matemático, pero los intentos por publicar sus trabajos fallaron, pues nunca quiso perfeccionar sus escritos.

Fermat tuvo una de las primeras ideas sobre el cálculo diferencial y, con Pascal, inventó el cálculo de probabilidades. Su obra se halla en el libro *Vaia opera mathematica,* publicada por su hijo en 1679.

10

MODELOS MATEMÁTICOS

La formulación de un problema es más importante que su solución.



A. Einstein (Alemania, 1879-1955)

1– PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

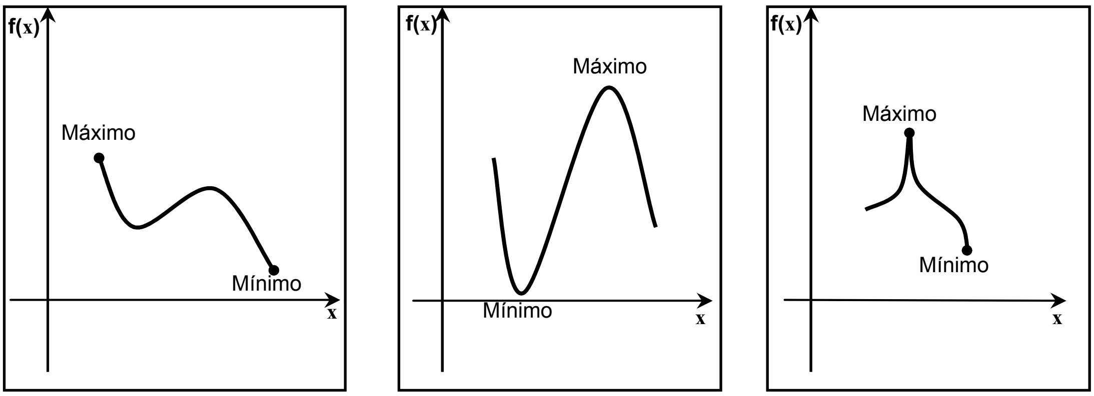
1.1. INTRODUCCIÓN

Los métodos para calcular máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la resolución de problemas prácticos. Para resolverlos hay que transformar sus enunciados en funciones y ecuaciones.

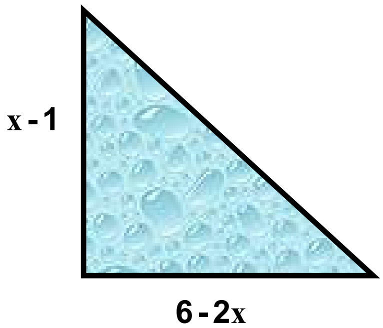
Es fundamental leer con atención la letra de los problemas, para identificar. por un lado, la función a maximizar o minimizar y, por otro, los restantes datos del problema, que relacionan las variables.

1.2. DÓNDE SE PUEDEN PRESENTAR LOS VALORES EXTREMOS

Por lo general, una función que se quiere maximizar o minimizar tiene como dominio un intervalo de números. Pero este intervalo puede ser de cualquiera de los tipos estudiados en el capítulo uno. Los extremos de la función pueden aparecer en el interior del intervalo (extremos relativos de la función, **$f'(x) = 0$ o no existente**) o en sus extremos.



EJEMPLO:
¿Para qué valor de x el área del triángulo rectángulo es la máxima?



Este es un caso muy sencillo, pues basta calcular la función área:

$$f_{\text{área}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$f_{\text{área}}: \ f(x) = \frac{(6-2x)(x-1)}{2}$$

$$f_{\text{área}}: \ f(x) = \frac{1}{2}\left(-2x^2+8x-6\right)$$

Su derivada es:

$$f'_{\text{área}}: \ f'(x) = \frac{1}{2}(-4x+8)$$

Esta se anula en $x = 2$ y constituye el máximo de la función.

signo $f'(x)$ $\underset{2}{\overset{0}{+ + + + \mid - - - -}}$

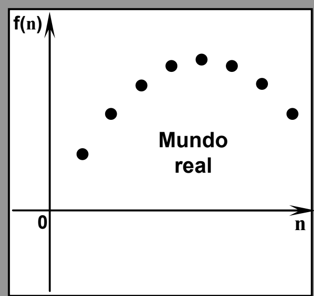
Solución: $x = 2$

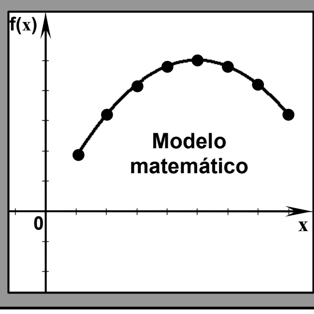
Discreto vs. continuo

La mayoría de los problemas en las ciencias sociales son propiamente vistos como discretos en su naturaleza. Más aún, la computadora digital es una herramienta exacta y rápida para manejar cantidades discretas.

Surge una pregunta natural: ¿por qué no estudiar los problemas discretos utilizando herramientas discretas, en lugar de modelarlos primero con curvas continuas?

Por esta razón, muchos colegas ofrecen ahora cursos de matemáticas discretas. Sin embargo, debido a su belleza y poder, el cálculo continúa gozando de popularidad como una herramienta para analizar los problemas, tanto de las ciencias sociales como las fisicomatemáticas.





Extraído de:
Purcell E.J. y Varberg D., (1992).
Cálculo con geometría analítica.
México, Prentice Hall.

EJEMPLO: Encontrar dos números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

1) Incógnitas del problema: los números a encontrar, que se llamarán $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

2) Función a maximizar: $\mathbf{f_{producto}: f(x, y) = x \cdot y}$

Otros datos del problema. Su suma es 100: $\mathbf{x + y = 100}$

Esto permite despejar una variable en función de la otra, para sustituir en la función producto. De la ecuación $x + y = 100$ se despeja: $y = 100 - x$

Se sustituye en la función producto:

$f_{producto}: f(x) = x(100 - x)$ $\qquad$ $f_{producto}: f(x) = -x^2 + 100x$

Que es la función a maximizar, o sea que debe encontrarse su máximo relativo, (cero de la derivada primera).

$f'_{producto}: f'(x) = -2x + 100$ $\qquad$ cero de $f' = \{50\}$ $\qquad$ signo $f'(x)$ $\quad \overset{0}{\underset{50}{+\ +\ +\ |\ -\ -\ -}}$

Solución: los números son **50** y **50**

EJEMPLO:

Una compañía de teléfonos halla que obtiene una ganancia de \$15 por aparato si la central tiene mil abonados o menos. Si hay más de mil abonados, la ganancia por aparato disminuye en un centésimo por cada abonado que sobrepasa ese número.

¿Cuántos abonados darían la máxima ganancia global?

La variable es el número de abonados, que se representa con $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

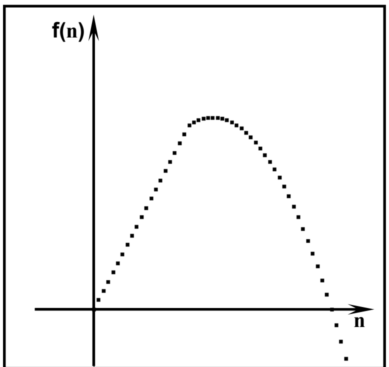
La ganancia si son mil o menos abonados es **15n**, pero si son más de mil, disminuye en **\$0.01** por cada abonado adicional. La ganancia en función del número de abonados viene dada por la siguiente fórmula:

$$f_{ganancia}: f(n) = \begin{cases} 15n & \text{si} \quad n \leq 1000 \\ \left(15 - \dfrac{n - 1000}{100}\right)n & \text{si} \quad n > 1000 \end{cases}$$

Al derivar se obtiene:

$$f'_{ganancia}: f'(n) = \begin{cases} 15 & \text{si} \quad n < 1000 \\ \dfrac{-2n + 2500}{100} & \text{si} \quad n > 1000 \end{cases}$$

Que tiene un máximo en: $\boxed{\mathbf{n = 1250}}$



Representación gráfica de la función ganancia en el conjunto de los números naturales.