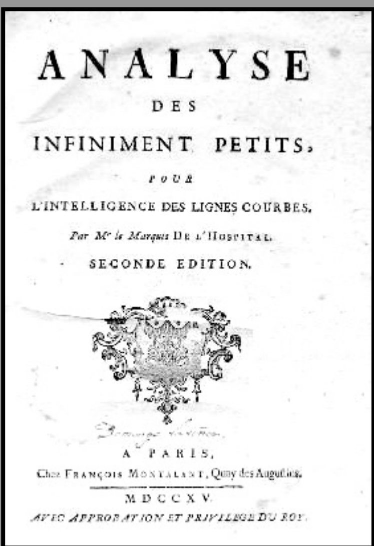
En las matemáticas del siglo XVII, junto a los métodos integrales, dieron sus primeros pasos también los métodos diferenciales en la resolución de problemas.

Tales problemas eran, en aquella época, de tres tipos: determinación de las tangentes a las curvas, búsqueda de máximos y mínimos de funciones, y búsqueda de las condiciones de existencia de raíces múltiples de las ecuaciones algebraicas.

Un extenso lugar en las obras sobre historia de las matemáticas del siglo XVII está marcado por la disputa por la prioridad del descubrimiento del cálculo diferencial e integral, entre Newton y Leibniz; descubrimiento que, como se ha demostrado, tuvo lugar de forma simultánea e independiente.

Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727)

Gottfried Leibniz (Alemania, 1646-1716)



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis De l'Hospital.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez François Montalant, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Guillaume Francois Antoine, marqués de L´Hôpital

(Francia, 1661-1704)

L'Hôpital sirvió como oficial de caballería pero tuvo que retirarse a causa de que era corto de vista. Desde entonces dirigió su atención hacia las matemáticas. L'Hôpital aprendió cálculo de su maestro Johann Bernoulli, en 1691.

Era un competente matemático, cuya fama está basada en su libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), el cual, aunque estuvo influido por las lecturas que realizó de sus profesores Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli y Leibniz, fue el primer libro de texto escrito sobre cálculo diferencial.

En ese libro creó la regla que ahora se conoce como *regla de L'Hôpital* para encontrar el límite de una función racional cuyo numerador y denominador tienden a cero.

En 1696 apareció el primer manual de cálculo diferencial y sus aplicaciones a la geometría: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* **de G. F. L´Hôpital.**

8

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES

Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo.

Arquímedes
(Italia,
287-212 a. C.)

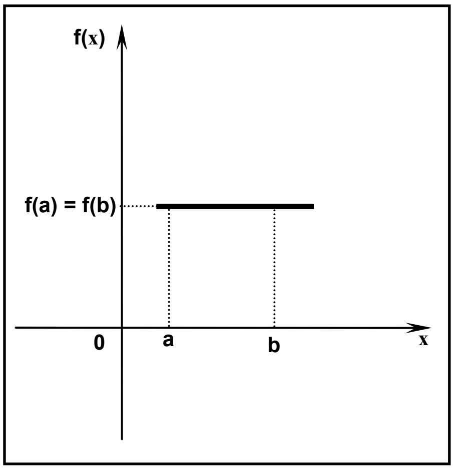
1– TEOREMA DE ROLLE

Si una función **f** *es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$ *y derivable en el intervalo abierto* (a, b), *y se cumple que* **f(a) = f(b),** *entonces existe por lo menos un punto* $c \in (a, b)$ *tal que:* $f'(c) = 0$

Hipótesis: **f** es continua en $[a, b]$ **f** es derivable en (a, b) **f(a) = f(b)**

Tesis: Existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

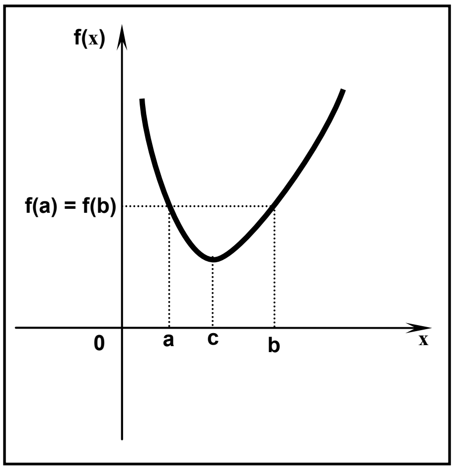
Para la demostración se aplica el teorema de Weierstrass, según el cual, al cumplirse la hipótesis de que la función **f** es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, presenta en ese intervalo un máximo **M** o un mínimo **m** absolutos.



Caso a

Si la función presenta estos valores de máximo y mínimo en los extremos del intervalo y siendo por hipótesis **f(a) = f(b)**, resulta **M = m = f(a) = f(b)** y la función es una constante **f: f(x) = k** para todo **x** perteneciente al intervalo.

Como la derivada de una constante vale cero, $(f': f'(x) = 0)$, el teorema se cumple para todo **x** perteneciente al intervalo.



Caso b

Sea ahora $\mathbf{m \neq M}$ (se supone $\mathbf{m < M}$). Uno de los dos será distinto de **f(a)** y **f(b)**. Sea $\mathbf{m \neq f(a)}$, por lo cual el mínimo se presenta en el interior de $(\mathbf{a, b})$. Si se llama **c** al punto de $(\mathbf{a, b})$ $\mathbf{a < c < b}$ en que $\mathbf{f(c) = m}$, siempre se puede encontrar un entorno de **c** $(\mathbf{c - \delta,\ c + \delta})$ interior al intervalo $[\mathbf{a, b}]$ donde para todo $\mathbf{x \in E(c, \delta)}$, $\mathbf{f(x) > f(c)}$. Luego, en **c** no sólo existe un mínimo sino que este es también un mínimo relativo.

Y dado que la función es derivable en $(\mathbf{a, b})$, por condición necesaria de existencia del extremo relativo, la derivada primera vale cero $\mathbf{f'(c) = 0}$, que es la tesis.

NOTA

A igual resultado se llega si se considera que el máximo **M** *es interior al intervalo* $(\mathbf{a, b})$.

EJEMPLO:

Investigar si la función $\mathbf{f: f(x) = (x-2)^2 + 1}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[\mathbf{1, 3}]$.

La función **f** es continua para todo **x** perteneciente a los reales. Su derivada $\mathbf{f': f'(x) = 2(x-2)}$ existe para todo **x** perteneciente a los reales. Y además se cumple que $\mathbf{f(1) = f(3) = 2}$.

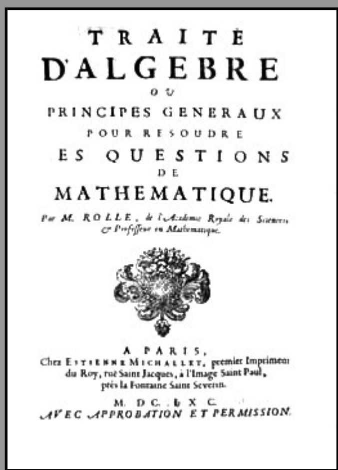
Se concluye que se verifica el teorema de Rolle.

El punto **c** de Rolle es el cero de la derivada primera $\rightarrow$ $\mathbf{x = 2}$

Michel Rolle

(Francia, 1652-1719)

Matemático francés, en gran parte autodidacta. Trabajó el álgebra, la geometría y el análisis diofántico. En 1685 fue elegido miembro, y en 1699 ***pensionnaire géometre*****, de la Academia Real de Ciencias de París.**

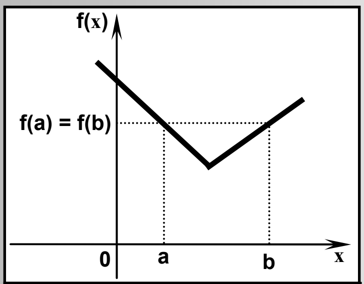

TRAITE
D'ALGEBRE
OU
PRINCIPES GENERAUX
POUR RESOUDRE
LES QUESTIONS
DE
MATHEMATIQUE.
Par M. ROLLE, de l'Academie Royale des Sciences, & Professeur en Mathematique.

A PARIS,
Chez ESTIENNE MICHALLET, premier Imprimeur du Roy, ruë Saint Jacques, à l'Image Saint Paul, prés la Fontaine Saint Severin.
M. DC. LXC.
AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

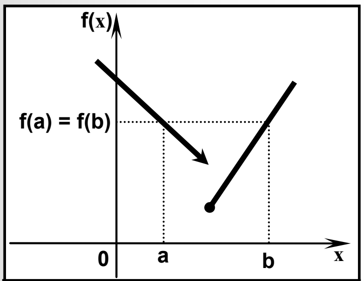
En 1690 publicó su *Traité d'Algebre*, **donde demuestra, en lenguaje muy diferente al actual, una versión polinómica del famoso teorema que lleva su nombre.**

NOTA

La continuidad de la función **f** en **[a, b]** y la derivabilidad en **(a, b)** son imprescindibles.



f es continua en **[a, b]** pero no es derivable en **(a, b)** y **no** existe **c**∈**(a, b)** tal que **f´(c) = 0**

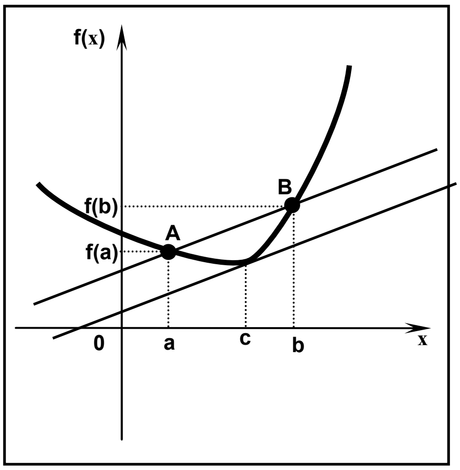


f no es continua en **[a, b]** y **no** existe **c**∈**(a, b)** tal que **f´(c) = 0**

2 – TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE

Si una función **f** *es continua en el intervalo* **[a, b]** *y derivable en el intervalo* **(a, b)**, *existe un punto* **c** *interior al intervalo donde se cumple:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Significado geométrico

La expresión: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es el coeficiente angular de la recta secante a la representación gráfica de **f** en los puntos de coordenadas **(a, f(a))** y **(b, f(b))**.

f´(c) es el coeficiente angular de la tangente a la representación gráfica de **f** en el punto de abscisa **c**.

El teorema expresa que en todo arco de curva continua hay por lo menos un punto de abscisa **c** perteneciente al intervalo, donde la tangente (no vertical) es paralela a la recta secante por **A** y **B** (o sea, tienen igual los coeficientes angulares).

En el enunciado del teorema de Lagrange se dice: «por lo menos un punto», pues puede haber varios puntos que cumplan la tesis.

Hipótesis: **f** es continua en **[a, b]** **f** es derivable en **(a, b)**

Tesis: Existe **c** ∈ **(a, b)** tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Para la demostración del teorema se considera una función auxiliar **g: g(x)**, diferencia entre las ordenadas de la función y de una recta que la corta y que pasa por los puntos de coordenadas **(a, f(a))** y **(b, f(b))**.