$f'(x)$

La geometría analítica proporcionó un poderoso estímulo a la invención del cálculo diferencial, puesto que la representación gráfica de una función reveló muchas de sus características importantes.

Kepler ya había notado que a medida que una cantidad variable se aproxima a su valor máximo, su variación (crecimiento o decrecimiento) se hace menor que en cualquier otro valor, hasta que, para el valor máximo, su variación es cero. En esto que constituye la contribución de Kepler, se tiene un ejemplo geométrico del principio de máximos y mínimos.

Johannes Kepler (Alemania, 1571-1630)

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del cálculo integral, hasta llegar a conseguir que problemas en un tiempo irresolubles, pudieran resolverse por los nuevos métodos y de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue, esencialmente, haber podido unir el cálculo integral y la segunda rama importante del cálculo: el cálculo diferencial.

La idea central del cálculo diferencial es la noción de derivada. Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de geometría: hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la matemática. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones.

La *derivada*, junto a *función* y *límite,* son las palabras claves del cálculo.

Isaac Newton

(Inglaterra, 1643-1727)

Difícilmente podría decirse que el camino de Newton a la fama estaba predeterminado. Su nacimiento fue prematuro y, durante algún tiempo, pareció que no sobreviviría debido a su debilidad física.

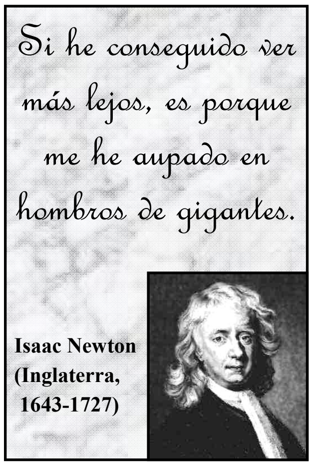
Pero ya en la Universidad, Newton aunque no se distinguió en el primer año de estudios en Cambridge, tuvo la valiosa ayuda de Barrow, distinguido profesor de matemática, quien quedó impresionado con sus aptitudes y en 1664 lo recomendó para una beca en matemática. De esta forma se familiarizó con la geometría algebraica de Descartes, conoció la óptica de Kepler, y estudió la refracción de la luz, la construcción de telescopios y el pulimento de las lentes.

En 1664 Halley, un joven astrónomo, visitó a Newton y lo instó a publicar sus descubrimientos. Esto hizo que Newton, en los siguientes dos años escribiera lo que resultó ser el mayor libro científico hasta entonces: Principios matemáticos de la filosofía natural. Escrito en latín, es rico en detalles, con pruebas basadas con exactitud en la geometría clásica, y sorprendentemente raro en sus conclusiones filosóficas, matemáticas y científicas.

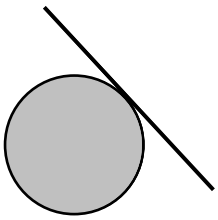
La carrera científica de Newton fue muy prolongada y entre sus contribuciones más importantes figuran el descubrimiento de la composición de la luz blanca, la formulación de las tres leyes fundamentales de la mecánica, la ley de la gravitación universal y el cálculo infinitesimal.

7

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

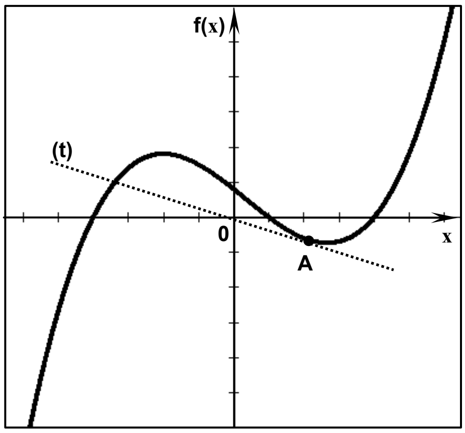


1 – TANGENTE A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN



El concepto de tangente a un círculo ya había sido considerado por los antiguos griegos. Ellos definían la tangente a un círculo como la recta que tiene un punto en común con el círculo y todos los demás fuera de él.

Esta definición de tangente dada por los griegos como una línea que toca a una curva en un solo punto está bien para el círculo, pero es del todo insatisfactoria para el resto de las curvas.



En la figura de la derecha es posible observar que la recta tangente **(t)** en el punto **A** corta a la representación gráfica de la función **f** en otro punto.

Este es un ejemplo de una situación no incluida en la definición de tangencia de los griegos.

Es mejor la idea de recta tangente en **A** a la representación gráfica de una función **f** como «la recta que mejor se aproxima a ella en las cercanías de **A**», pero todavía es muy vaga la idea para la precisión matemática.

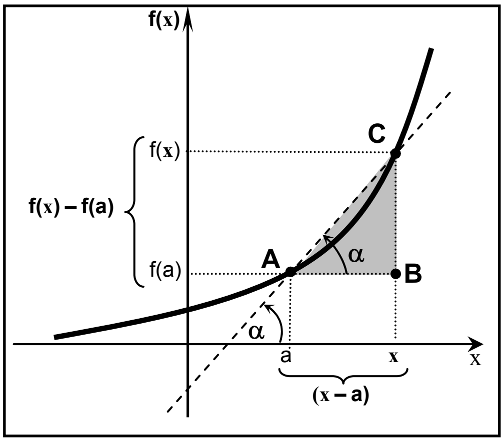
El concepto de límite proporcionará el modo de alcanzar la mejor descripción.

2 – INTRODUCCIÓN GEOMÉTRICA

En beneficio de la claridad en el concepto de derivada, resulta esencial una interpretación geométrica.

Cronológicamente, en la historia de la matemática la interpretación geométrica precedió a la analítica.

Uno de los problemas principales del siglo XVIII consistía en trazar la tangente a una curva, en un punto arbitrario. Fue resuelto por el predecesor y profesor de Newton en Cambridge: Isaac Barrow.

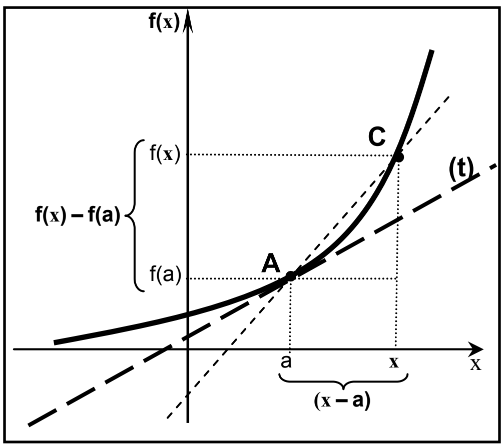


Considérese la recta que pasa por los puntos **A** y **C**, llamada *secante* a la representación gráfica de la función **f**.

La tangente del ángulo α que forma la secante por los puntos **A** y **C** y el eje $\overrightarrow{ox}$ se llama *coeficiente angular* (o *pendiente*) de la recta **(AC)** al cual anotaremos por: $\mathbf{m_{(AC)}}$ y es una medida de la inclinación de la recta **(AC)**.

En el triángulo rectángulo **ABC** es posible medir la tangente del ángulo α, que viene dada por:

$$\mathbf{m_{(AC)}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



A medida que el punto **C** se aproxima al punto **A,** la recta **(AC)** tiende a ser (si existe) la recta tangente **(t)** a la representación gráfica de la función **f** en el punto **A**.

El coeficiente angular de la secante **(AC)** tiende a ser el coeficiente angular de la recta tangente **(t)**.

$$m_{(t)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$m_{(t)} = f'(a)$$

(Veáse definición de derivada en el punto siguiente).

3 – DERIVADA EN UN PUNTO

La función **f** es *derivable* en **a**$\in$**D(F)** si y solo si existe el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, al cual anotaremos **f´(a).**

f es derivable en x=a $\Leftrightarrow$ $\exists$ **E(a, δ)** $\subset$ **D(f)** / existe
$$f´(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En todo el desarrollo del capítulo se da por supuesto que existe algún entorno de a, incluido en el dominio de la función.

$\exists$ **E(a, δ)** $\subset$ **D(f)**

Este límite puede no existir, de modo que no toda función tiene derivada en un punto, aun cuando sea continua en él. Cuando el límite exista, se dirá que **f** es derivable en el valor de **x** considerado.

Cuando no exista el límite, se dirá que la función no es derivable en el punto.

NOTA

La derivada de una función en un punto, cuando existe, es única (véase unicidad del límite).

EJEMPLO: Dada f: $f(x) = x^3$ calcular f´(2)

Se debe calcular el siguiente límite: $f´(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$ que es una indeterminación cero sobre cero.

$$f´(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{\cancel{(x-2)}} = 12$$

$$\boxed{f´(2) = 12}$$

Antes de continuar, es conveniente hacer el ejercicio 219, de la página 189.