$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Cuando se empezó a desarrollar el cálculo infinitesimal, la mayor parte de las funciones analizadas eran continuas y, por lo tanto, no era necesario definir exactamente qué se entendía por función continua.

Pero a mediados del siglo XVIII se presentaron algunas funciones discontinuas relacionadas con problemas de física, sobre todo en los trabajos de J. Fourier sobre la teoría del calor.

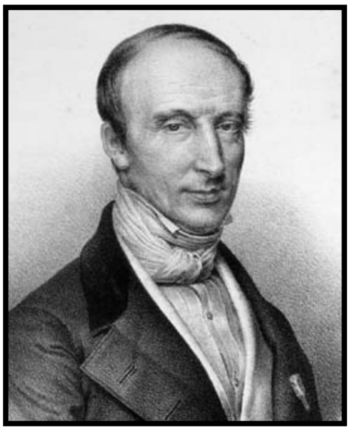
Joseph Fourier
(Francia, 1768-1830)

A veces se describe intuitivamente una función continua como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Aunque esta definición es demasiado optimista, resulta útil para comenzar a trabajar con gráficas.

Una definición rigurosa de continuidad fue formulada por primera vez en 1821 por el matemático Augustin Louis Cauchy.

Augustin Louis Cauchy

(Francia, 1789-1857)



Cauchy trabajó como ingeniero militar y en 1810 llegó a Cherburgo para apoyar a Napoleón en la invasión a Inglaterra. En 1813 retornó a París y luego, persuadido por Laplace y Lagrange, se convirtió en un devoto de las matemáticas.

París era un lugar difícil para vivir, debido a los eventos políticos relacionados con la Revolución Francesa. En varias ocasiones, Cauchy dejó París para vivir algún tiempo en Suiza. En Praga conoció a Bolzano.

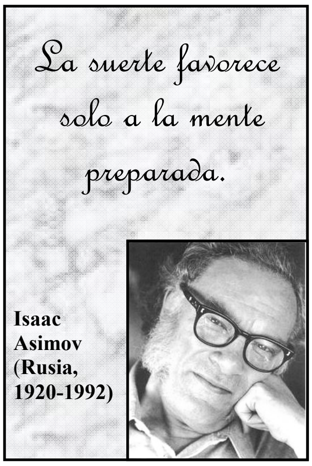
Era un católico devoto y su actitud religiosa lo enfrentó a lo largo de su vida con su posición académica y con otros científicos.

Con Cauchy se precisaron los conceptos de función, límite y continuidad, en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia.

Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que ha quedado eliminada.

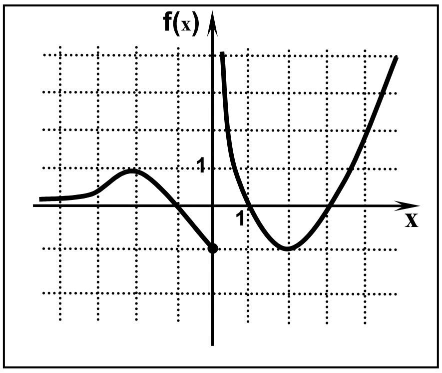
5

CONTINUIDAD DE FUNCIONES



1 – INTRODUCCIÓN

En forma intuitiva se dice que una función es continua cuando se la puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja. Pero este concepto solo se aplica a algunas funciones elementales. Para funciones más complejas ello no es posible, y se habla, entonces, de continuidad en un punto o en un intervalo, finito o infinito.



Si se observa la representación gráfica de la función **f** definida en los números reales, es posible afirmar que no es continua en $x = 0$

La mayoría de las funciones elementales son continuas en su dominio. En la próxima página se verá algo más sobre la relación entre dominio y continuidad.

¿Será cierto?

Responder «verdadero» o «falso», y justificar la respuesta.

Una función es continua si:

i) **Podemos levantar el lápiz al dibujarla en su dominio.**

ii) **Es a rayas.**

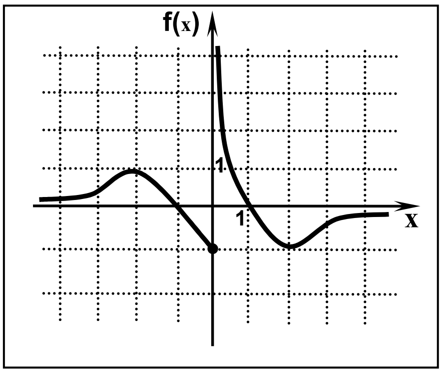
iii) **No podemos levantar el lápiz al dibujarla en su dominio.**

iv) **Está definida para todos los puntos.**

Véanse los resultados en la página 373.

2 – DOMINIO Y CONTINUIDAD

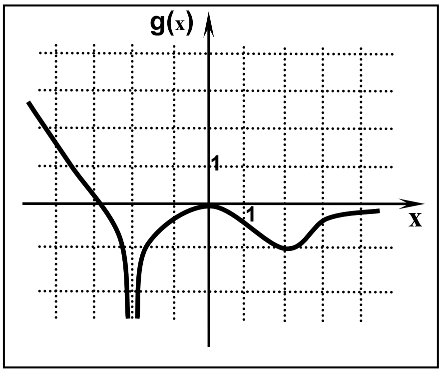
La observación de las representaciones gráficas de las funciones **f, g** y **h** permite contestar las siguientes preguntas.



¿Dominio de la función f?
D(f) = $\mathbb{R}$ Téngase en cuenta que **f(0) = – 1**

¿f es continua en su dominio?
No, pues no es continua en **x = 0** (hay que levantar el lápiz para completar el dibujo)

¿f es continua en los números reales?
No, pues no es continua en **x = 0** (hay que levantar el lápiz para completar el dibujo).

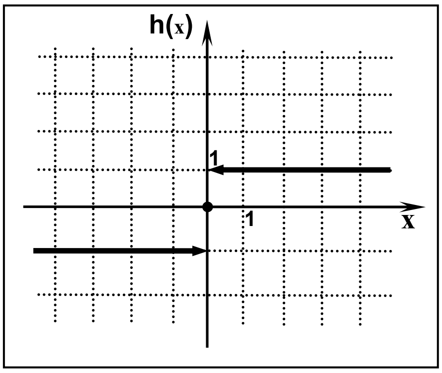


¿Dominio de la función g?
D(g) = $\mathbb{R} - \{-2\}$

¿g es continua en su dominio?
Sí, pues **x = – 2** no pertenece al dominio

¿g es continua en los números reales?
No, pues no está definida en todos los números reales.

Recordar que la definición de continuidad solo tiene sentido para valores de **a∈D(f)**.



¿Dominio de la función h?
D(h) = $\mathbb{R}$ Téngase en cuenta que **h(0) = 0**

¿h es continua en su dominio?
No, pues no es continua en **x = 0** (hay que levantar el lápiz para completar el dibujo).

¿h es continua en los números reales?
No, pues no es continua en **x = 0** (hay que levantar el lápiz para completar el dibujo).

Debe tenerse en cuenta, entonces, que una función puede ser o no continua en su dominio. El dominio de una función es el conjunto de valores donde está definida.

3 – DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Una función es continua en **$a \in D(f)$**
si y solo si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

De la definición anterior surge que para que **f** sea continua en **$x = a$**, existe un **$E(a, \delta) \subset D(f)$** donde se cumple:

1) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

lo cual, según teorema 8.3 del capítulo 3 sobre límites, significa que existen, son finitos y son iguales los límites laterales en **$x = a$**.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = (\text{finito})$$

2) El valor de dicho límite es **f(a)**.

Cuando la anterior definición de continuidad no se cumple, lo cual implica necesariamente que alguna de las consecuencias 1 o 2 no se cumple, se dice que la función es **discontinua** en **$x = a$**.

Todas las funciones elementales y sus compuestas son continuas en todo punto en que tengan un valor numérico determinado. Sus puntos de discontinuidad son solamente aquellos en que no se cumplen las anteriores consecuencias 1 o 2.

Cuidado !!

La definición de continuidad solo tiene sentido para valores de $a \in D(f)$.

Si $a \notin D(f)$ no puede decirse que f no es continua en $x = a$.

¿Será cierto?

Responder «verdadero» o «falso», y justificar la respuesta.

1) **Si existe f(c), entonces f es continua en $x = c$**

2) **Si $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = 1$ entonces f es continua en $x = c$**

3) **Sea f: $f(x) = \text{sig}(x - 3)$. Como $f(3) = 0$, la función es continua en $x = 3$**

4) **Sea g: $g(x) = \text{sig}(x^2)$. Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ entonces g es continua en $x = 0$**

Véanse los resultados en la página 373.