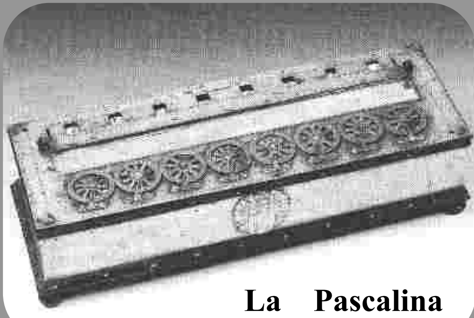
Del ábaco al computador personal

La historia de la informática se remonta a la antigüedad. El ejemplo más remoto es el ábaco, que ya se utilizaba en el año 2000 a. C. y todavía se usa en Japón y en Europa oriental. El ábaco es una clase de computadora muy útil, en la que se puede ver físicamente la suma, en los alambres: la posición de las bolas movibles constituye una «memoria» de la suma. Pero el ábaco no es automático y no es útil para manejar cifras elevadas.

El matemático y filósofo francés Blaise Pascal inventó en 1642 la primera calculadora mecánica del mundo, posiblemente para complacer a su padre, que era el inspector de hacienda de la zona. La máquina funcionaba a la perfección, transportaba los números de la columna de las unidades hasta la columna de las decenas mediante un mecanismo de trinquete, más o menos de la misma forma en que transporta los números el velocímetro de un automóvil, y era totalmente funcional. Blaise la denominó *Pascalina.*

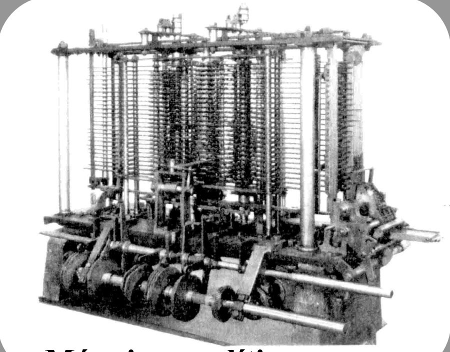


La Pascalina

Gottfried Leibniz trabajó en el perfeccionamiento de la máquina de suma de Pascal, e intentó mejorarla de forma que fuera capaz de multiplicar y dividir. Lo logró mediante un dispositivo mecánico llamado *cilindro de Leibniz.* Después de haber perfeccionado esta máquina, Leibniz centró sus esfuerzos en la creación de un método que permitiera convertir el sistema decimal en otro de base binaria.

Charles Babbage nació en 1791, en el seno de una familia adinerada. Dispuso de toda clase de facilidades para acceder a una completa educación y muy pronto demostró ser un genio de las matemáticas. En 1822 presentó en la Royal Astronomical Society su primer modelo de un ingenio «diferencial», una máquina que efectuaba los cálculos necesarios para construir tablas logarítmicas. En 1834, Babbage diseñó una máquina analítica que podía efectuar cálculos con números de hasta 80 dígitos y que incorporaba muchas de las características de la computadora moderna.

Con su trabajo, Babbage anticipó la estructura de la computadora electrónica moderna, pero fracasó en convertir en realidad su visión global. Su ingenio analítico jamás llega a terminarse, en razón de las limitaciones técnicas de la ingeniería del siglo XIX.



Máquina analítica

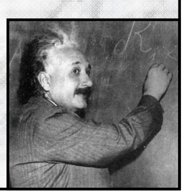
No fue hasta 1936 que se cumplieron las expectativas de Babbage, cuando Alan Turing, al frente de un equipo de investigación en Inglaterra, desarrolló el invento más secreto de la segunda guerra mundial: el Colossus, primera computadora electromecánica del mundo. Esta fue la máquina que descifró los mensajes alemanes en código Enigma durante el conflicto bélico. Acabada la guerra, Turing se estableció en Estados Unidos. Con su ayuda se construyó la primera computadora norteamericana. Esta se llamó ENIAC; empleaba 18000 válvulas, cada una de las cuales se quemaba en dos minutos. La informática se perfeccionaba progresivamente, pero recién en 1947 se hizo realidad el cálculo rápido, cuando se inventó el transistor de silicio.

4

CÁLCULO DE LÍMITES

En la medida en que las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son exactas, y en tanto son exactas, no se refieren a la realidad.

A. Einstein (Alemania, 1879-1955)



1 – OPERACIONES DETERMINADAS – INDETERMINADAS

A lo largo del curso se trabaja con conceptos que el alumno no está acostumbrado a manejar con facilidad. Por ejemplo, en la práctica diaria se dirá que una constante dividida por cero da infinito. En esta afirmación entran dos conceptos hasta ahora no trabajados por el estudiante.

1) Cuando se hace referencia al cero, la mayoría de las veces se quiere significar una expresión matemática que tiende a ser muy chica.
2) Cuando se habla de infinito, no se trata de un número determinado, sino que se hace referencia a un número mayor que cualquier constante.

La división entre cero no se puede efectuar en ningún conjunto numérico.

Sin embargo, sí es posible realizar una división entre un número tan pequeño como se quiera.

Ejemplo numérico

$$\frac{1}{0.1} = 10$$

$$\frac{1}{0.01} = 100$$

$$\frac{1}{0.001} = 1000$$

$$\frac{1}{0.0001} = 10000$$

Es posible observar que si el numerador permanece constante, cuanto más pequeño se hace el denominador más grande se hace el resultado.

Se dirá entonces que una constante dividida por una expresión que tiende a cero, tiende a dar un resultado muy grande.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{constante}}{x} = \infty$$

En la práctica de trabajo con límites, se indicará simplemente que *una constante dividida por cero, da infinito* sobreentendiendo que **NO** se está dividiendo por cero, sino por una expresión que tiende a cero.

$$\boxed{\frac{\mathbf{k}}{\to \mathbf{0}} \to \infty} \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Del mismo modo, la división entre infinito no tiene sentido, pues infinito no es un número, sino un concepto que significa *un número tan grande como se quiera*.

Ejemplo numérico

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{100} = 0.001$$

$$\frac{1}{1000} = 0.0001$$

$$\frac{1}{10000} = 0.00001$$

Es posible observar que si el numerador permanece constante, cuanto más grande se hace el denominador, más pequeño es el resultado.

Se dirá entonces que una constante dividida por una expresión que tiende a infinito, tiende a un resultado muy pequeño.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{constante}}{x} = 0$$

En la práctica de trabajo con límites, se indicará simplemente que *una constante dividida infinito da cero,* sobreentendiendo que no se está dividiendo por infinito sino por una expresión que tiende a ser más grande que cualquier constante arbitraria.

$$\boxed{\frac{\mathbf{k}}{\to \infty} \to \mathbf{0}} \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{k}}{\infty} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{0}} = \infty}$$

Cuando un estudiante hace uso de estas formas concisas de expresión, debe reconocer que son solamente abreviaciones *hechas por comodidad*, **que debido a su sencillez son muy útiles, pero no expresan el conocimiento verdadero**.

NOTA

En todos los casos, además del valor de la operación es necesario tener en cuenta el signo de las expresiones.

Por ejemplo, $\frac{-4}{\to +\infty} \to 0^{-}$

Formas indeterminadas

En este curso, en el cálculo de límites, el estudiante se encuentra muy a menudo, con ciertas operaciones cuyo resultado depende de las funciones que entran en el cálculo, y cuyo resultado no es tan fácil hallar, pues puede ser cualquiera. Se dirá que se encuentra ante una **forma indeterminada**.

Ejemplo: Se dirá que cero dividido por cero es una forma indeterminada, entendiéndose que son dos funciones: numerador y denominador, que tienden a cero. Decir que se está ante una forma indeterminada significa que no se conoce el resultado y, para hallarlo, hay que resolver (levantar) la indeterminación.

Indeterminaciones

Indeterminaciones en la suma o resta	$\rightarrow$	$+\infty - \infty$ $-\infty + \infty$
Indeterminaciones en la multiplicación	$\rightarrow$	$0.\infty$ $\infty.0$
Indeterminaciones en la división	$\rightarrow$	$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad \dfrac{0}{0}$
Indeterminaciones potenciales – exponenciales	$\rightarrow$	1^{∞} $\quad 0^{0}$ $\quad \infty^{0}$

2 – CÁLCULO DE LÍMITES

Hallar el límite de una expresión matemática **consiste desde el punto de vista práctico**, en sustituir la variable **x** por el valor de tendencia y hacer las cuentas indicadas.

Puede obtenerse un resultado determinado (finito, infinito), no existe, o puede detectarse una indeterminación. Esta se tendrá que resolver para hallar el límite en cuestión.

En el estudio sistemático del cálculo de límites se empezará con las expresiones más sencillas para ir progresando hacia los límites más difíciles.

3 – LÍMITE DE UNA CONSTANTE

El límite de una constante, para cualquier valor de la tendencia, es la propia constante.

EJEMPLO: Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} 4 \qquad \lim_{x \to 0} -5 \qquad \lim_{x \to -2} b$$

CASO 1

$$\lim_{x \to +\infty} 4 = 4 \qquad \lim_{x \to 0} -5 = -5 \qquad \lim_{x \to -2} b = b$$