Entre todos los conceptos que se presentan en este texto, el de *límite*, sin dudas, es el más importante y, quizás, también el más difícil.

En los años treinta y cuarenta del siglo XVIII, fundamentalmente gracias a Euler, se elaboró, sistematizó y clasificó la teoría de las funciones elementales analíticas. Esta teoría de Euler no pudo ser reconocida como satisfactoria, pues se limitaba a enmascarar los pasos reales al límite.

El trabajo más serio que reveló la posibilidad total del cálculo diferencial algebraico y que determinó su destino fue el de Lagrange, en 1797: *Teoría de las funciones analíticas*. Sin embargo, siguió sin resolver el concepto de límite.

Semejante dificultad existió durante mucho tiempo hasta que, a finales del siglo XIX, fue creado el «aparato delta épsilon» de la teoría de límites.

A Cauchy se debe la idea de basar el cálculo en una clara definición de límite.

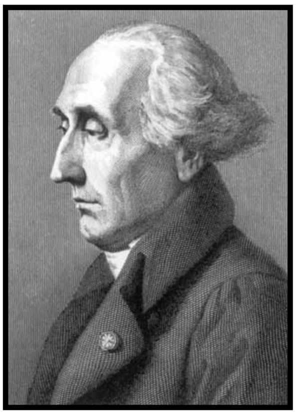
La definición de límite usando (ε, δ) comprende en pocas palabras el resultado de los esfuerzos para establecer este concepto sobre una base matemática firme.

$\delta \qquad \varepsilon$

Delta y épsilon son la cuarta y la quinta letra del alfabeto griego respectivamente y se usan, siguiendo una larga tradición, como números reales positivos y muy pequeños.

Joseph-Louis Lagrange

(Italia, 1736–1813)



Normalmente se considera que Joseph-Louis Lagrange era francés, pero la *Enciclopedia Italiana* se refiere a él como un matemático Italiano, lo cual es muy razonable, pues Lagrange nació en Turín y fue bautizado con el nombre de Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Una especulación insensata, llevada a cabo por su padre, abandonó a Lagrange a sus propios recursos, a una edad temprana. Pero este cambio de fortuna no le resultó una gran calamidad, «pues de otro modo –dijo él– tal vez nunca hubiera descubierto mi vocación».

Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. A los dieciséis años de edad fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín, donde el tímido muchacho, que no poseía recursos de oratoria y era de muy pocas palabras, mantenía la atención de hombres bastante mayores que él.

Lagrange estaba dispuesto a apreciar el trabajo sutil de los demás, pero estaba igualmente capacitado para descubrir un error. En una temprana memoria sobre las matemáticas del sonido señaló defectos, incluso en la obra de Newton. Otros matemáticos le reconocían, sin envidia, primero como su compañero y, más tarde, como el mayor matemático viviente.

3

ESTUDIO DE LOS LÍMITES

Aquel que le gusta la práctica sin la teoría, es como el marino que navega barcos sin timón ni brújula y nunca sabe dónde debe anclar.

Leonardo Da Vinci (Italia, 1452-1519)

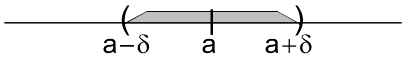
1 – ENTORNO

1.1. DEFINICIÓN

Dado $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ se define *entorno* de centro **a** y radio δ (delta), al conjunto de los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ situados entre $\mathbf{a - \delta}$ y $\mathbf{a + \delta}$, esto es, al conjunto

$$\{x \;/\; x \in \mathbb{R},\;\; a - \delta < x < a + \delta\}$$

Su representación gráfica en la recta es:

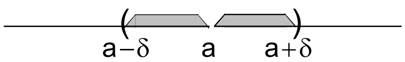


Entorno de **a** es la forma teórica de referirse a un conjunto de valores cercanos a $\mathbf{x = a}$. En la práctica se indicará que $\mathbf{x \to a}$.

En la mayoría de los casos significa que $\mathbf{x \neq a}$ pues la función no necesariamente existe en este valor, o sea que no se incluye a $\mathbf{x = a}$. Se hace referencia entonces a un *entorno reducido* de centro **a** y radio δ, esto es, al conjunto

$$\{x \;/\; x \in \mathbb{R},\;\; a - \delta < x < a + \delta,\;\; x \neq a\}$$

Su representación gráfica en la recta es:



1.2. NOTACIÓN

La notación más sencilla de un entorno se expresa con la letra **E**, primera letra de esta palabra, a la que se agregan el centro del entorno **a** y el radio δ.

Entorno de **a**, de radio δ: **E(a, δ)**

Cuando se quiere indicar que x = **a** **no** pertenece al entorno, o sea que se trata de un entorno reducido, se agrega a esta notación un indicador * (asterisco).

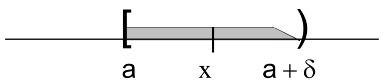
Entorno reducido de **a**, de radio δ: **E*(a, δ)**

Otra notación

En algunos casos es necesario operar con los entornos, y por ello resulta más adecuada la siguiente notación.

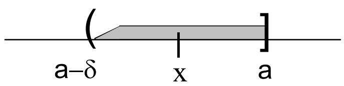
Todo valor de x mayor o igual que **a,** o sea entre **a** y **(a + δ)**, dista del centro del entorno una distancia menor que δ, lo cual se expresa: **$(x - a) < \delta$**.

Su representación gráfica es:



Todo valor de x menor o igual que **a,** o sea entre **(a – δ)** y **a**, dista del centro del entorno una distancia menor que δ, lo cual se expresa: **$(a - x) < \delta$**.

Su representación gráfica es:



Para reunir todos los valores de x considerados (a la derecha y a la izquierda de **a**) se usa el valor absoluto.

Entorno de **a**, de radio δ: $\lvert x - a \rvert < \delta$

La notación con valor absoluto permite escribir en una sola expresión tanto los valores de x que son mayores o iguales que **a** como los que son menores que **a**.

En el caso de considerarse un entorno reducido, este se anotará como:

Entorno reducido de **a,** de radio δ: $0 < |x - a| < \delta$

Son todos los valores de $\mathbf{x}$ cuya distancia a **a** es menor que δ pero mayor que cero. Por ello, $\mathbf{x}$ no puede valer **a** $(\mathbf{x} \neq \mathbf{a})$.

NOTA

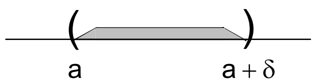
En algunos casos podría resultar útil definir *entorno cerrado* de centro **a** y radio δ.

$$\mathbf{E[a, \delta] = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \delta\}}$$

En los entornos, generalmente se usan los siguientes radios.
δ (delta) para los entornos de $\mathbf{x}$ en el eje $\overrightarrow{ox}$,
ε (épsilon) para los entornos de $\mathbf{f(x)}$ en el eje $\overrightarrow{oy}$.

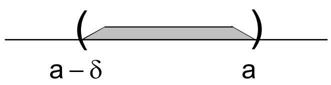
1.3 ENTORNOS LATERALES

Cuando sea necesario referirse a los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a < x < a + \delta}$ se hablará de un *entorno lateral derecho.*



Se anotará en forma abreviada como: $\overset{+}{E}(a, \delta)$

En forma similar, los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a - \delta < x < a}$ se llamarán *entorno lateral izquierdo.*



Se anotará en forma abreviada como: $\overset{-}{E}(a, \delta)$