La noción de función

Históricamente, el concepto de función nació ligado a la idea de dependencia de cantidades variables, en unión con el estudio del movimiento, en época de Galileo Galilei, y con la caracterización dada por Nicolás de Oresme: «Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento». Esta concepción de carácter físico y geométrico antecedió a la noción cartesiana de dependencia numérica.

En el siglo XVII se hizo más común el uso de expresiones explícitas de funciones, con el desarrollo del cálculo infinitesimal. Fue Leibniz, en 1673, el primero en emplear el término *función* en el sentido actual. Su discípulo Jean Bernoulli escribió: «Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes». La expresión de *alguna manera* significa que es expresable con operaciones matemáticas.

A Leonhard Euler se debe, además del uso de letras de función como $f(x)$ para expresar el valor que la función f asocia a la variable x, la siguiente definición: «Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes». Sin embargo, esta definición de Euler es limitada; exige que la definición sea explícita.

Joseph Fourier, en 1822, escribió: «Una función general $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria». Esta definición contempla singularidades, pero considera que el dominio es numerable, ya que se trata de una sucesión.

En 1834, Nicolai Lovachevski exponía: «La concepción general requiere que una función de x sea definida como un número dado para cada x, variando gradualmente con x. El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida».

Según palabras de Peter Dirichlet, en 1837: «Dos variables x e y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que y es una función (unívoca) de x».

Cien años más tarde, los Bourbaki formalizan el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos.

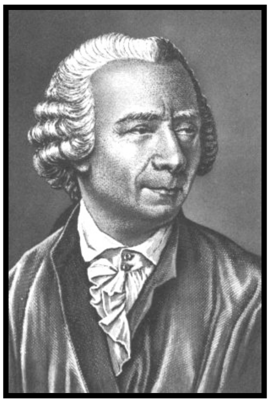
En los libros de texto de principios de siglo XX es posible encontrar definiciones de *función* que, siendo correctas y equivalentes a la definición que encontramos en los textos actuales, no hacen uso de formalismos propios de la teoría de conjuntos.

Tanto la evolución histórica de la definición de *función*, como el análisis de las definiciones existentes en los libros de texto recién mencionados, otorgaron una visión del concepto de función que trasciende al formalismo que la expresa.

Extraído de: Rabuffetti, H. (1972). *Introducción al análisis matemático. Cálculo 1.* Buenos Aires. El Ateneo.

Leonhard Euler

(Suiza, 1707–1783)



Euler estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli y se licenció a los 16 años.

En 1727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemática en 1733. En 1741 fue profesor de matemática en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande.

Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir treinta años de edad, y por una ceguera casi total al final de su vida. Fue uno de los últimos hombres que pudo tener un conocimiento acabado de todas las matemáticas de su época.

2

FUNCIONES

La que llamamos casualidad no es más qua la ignorancia de las causas físicas.

Gottfried Leibniz
(Alemania, 1646-1716)

1 – DEFINICIONES

1.1. INTRODUCCIÓN

Existencia. Se dice que una relación entre dos conjuntos cumple existencia si **todos** los elementos del primer conjunto tienen, por lo menos, un correspondiente en el segundo.

Unicidad. Se dice que una relación entre dos conjuntos cumple unicidad si cada elemento del dominio tiene una y una sola imagen.

Se dice que una relación que cumpla **unicidad** y **existencia** es una relación funcional o, simplemente, **función**.

Dominio

Cuando no se especifica el dominio de una función real, siempre se supondrá que es el mayor conjunto de números reales para los cuales la función tenga sentido.

Véase "Relación Binaria" en *Matemática de quinto* de Gustavo A. Duffour.

1.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una relación **f** entre elementos de un conjunto **A** y elementos de un conjunto **B** es una *función* de **A** en **B** si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \forall\ x \in A\ \ \exists\ \ y \in B\ /\ (x, y) \in \mathbf{f} & \text{(existencia)} \\ (x, y) \in \mathbf{f}\ \text{ y }\ (x, z) \in \mathbf{f}\ \Rightarrow\ y = z & \text{(unicidad)} \end{cases}$$

1.3. NOTACIÓN

A las funciones se las nombra con una letra, generalmente la **f**. Cuando sea necesario hablar de varias funciones, se usarán: **g, h ...** Es posible usar cualquier letra, salvo la x y la y, para evitar confusiones, pues estas se usan generalmente para indicar números reales. En este caso la letra x que representa a los elementos del conjunto preimagen (dominio) se llama *variable independiente*. Si la función se anota con la letra **f**, su dominio se simboliza por **D(f)**.

Si **f** es la función, entonces el número que **f** asocia con x se designa **f(x)**. El conjunto de valores de **f(x)** se llama *recorrido* de la función o *conjunto de imágenes*, y se anota **R(f)** o **Im(f)**.

$$f \neq f(x)$$

Pues f representa la función, o sea, el conjunto de pares ordenados.

Y f(x) es solo el segundo componente de cada par.

Recordemos que el símbolo **f(x)** solamente tiene sentido cuando x pertenece al dominio de **f**. Para otros x el símbolo **f(x)** no está definido.

Es costumbre escribir $y = f(x)$

Ello significa: «y es el valor que la función **f** asigna al elemento x». La letra y que representa los elementos del conjunto imagen (recorrido) se llama *variable dependiente*.

O sea: $f: A \to B$ es una función $\Leftrightarrow \begin{cases} f \subseteq A \times B \\ \forall\, x \in A \Rightarrow \text{existe un único } y \in B \;/\; (x, y) \in f \end{cases}$

NOTA

En la práctica de trabajo se toleran algunas abreviaciones. Como hablar de la función $y = f(x)$, que confunde en rigor un número y una función, pese a lo cual su uso resulta muy cómodo.

En este libro, en la mayoría de los casos se usará la forma abreviada que se muestra en el siguiente ejemplo:

$$f: f(x) = x^2 + 3x$$

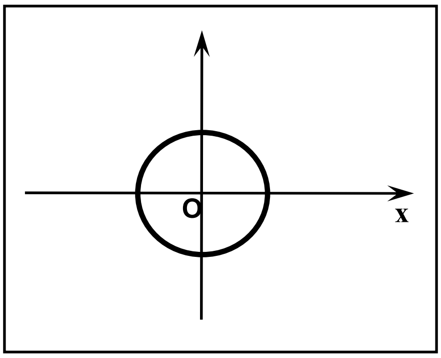
Se sobreentiende que está definida $D(f) \to \mathbb{R}$ $\quad D(f) \subseteq \mathbb{R}$

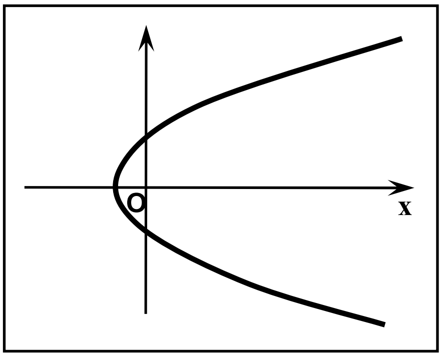
2 – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Se llama *representación gráfica* de una función **f** al conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas $(x, \mathbf{f}(x))$ pertenecen a **f**. Es una muy buena manera de poder visualizar a todas las parejas $(x, \mathbf{f}(x)) \in \mathbf{f}$.

Cada vez que se haga referencia a la representación gráfica de una función, en un sistema de coordenadas cartesianas, lo anotaremos por **Gra(f)**.

No son funciones las representaciones gráficas siguientes, porque existen valores de la variable x a los cuales les corresponden dos valores funcionales.

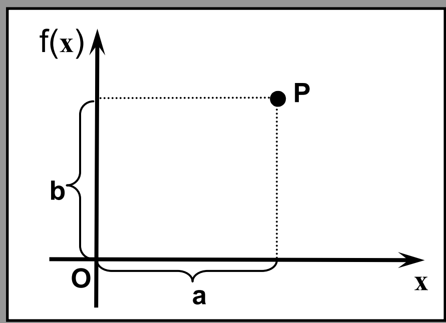




Estas representaciones gráficas sugieren una regla:

> Para que un dibujo sea la representación gráfica de una función **f**, cada recta vertical debe cortar al dibujo en un solo punto.

Sistema de coordenadas cartesiano



Es el sistema formado por dos ejes perpendiculares $\overrightarrow{ox}$ $\overrightarrow{oy}$ cuyos orígenes coinciden en el punto O.

Comúnmente se considera al eje $\overrightarrow{ox}$ el horizontal, graduado positivamente hacia la derecha, y el eje $\overrightarrow{oy}$ el vertical, graduado positivamente hacia arriba.

A cada punto P del plano le corresponde uno y solo un par de valores (a, b) llamados coordenadas cartesianas o rectangulares del punto P.

Cuando se representa un punto en el plano, con un par de números reales (a, b), se conviene que la abscisa a se escribe en primer lugar. Y la ordenada b, en segundo lugar.

Por esa razón se considera a (a, b) como un par ordenado.

El origen O tiene como coordenadas (0, 0).

Los puntos sobre el eje $\overrightarrow{ox}$ tienen por coordenadas $(x, 0)$.

Los puntos sobre el eje $\overrightarrow{oy}$ tienen por coordenadas $(0, y)$.