π $\sqrt{2}$ e

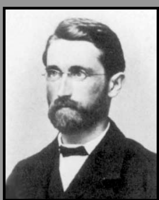
Existen ciertos problemas cuya resolución es imposible con los números racionales. Ello obliga a ampliar los conjuntos numéricos introduciendo los números reales.

El más clásico de estos problemas es la imposibilidad de la radicación cuando la cantidad subradical no es un cuadrado perfecto.

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ es muy sencilla de demostrar y ya era conocida por los griegos quinientos años antes de cristo. Puesto que el teorema de Pitágoras prueba que un triángulo rectángulo isósceles con los catetos de longitud 1 tiene una hipotenusa de longitud $\sqrt{2}$, no es sorprendente que los griegos investigaran esta cuestión.

No obstante, hasta el siglo XIX no se desarrolló una teoría satisfactoria de tales números. En esa época fueron introducidas tres teorías diferentes por Cantor, Dedekind y Weierstrass.

G. Cantor (Rusia, 1845-1918)



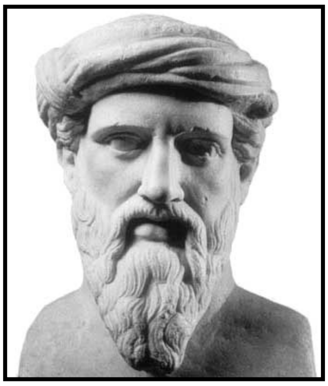
R. Dedekin (Alemania, 1831-1916)

K. Weierstrass (Alemania, 1815-1897)

Un estudio riguroso y exhaustivo del análisis matemático requeriría la inclusión de una definición del número real. Pero, en realidad, en la mayoría de las fases del análisis, más que los métodos usados en la construcción del conjunto de los números reales, nos interesan sus propiedades. Por lo tanto, se tomará como punto de partida un pequeño grupo de axiomas, de los cuales se pueden deducir todas las propiedades de los números reales.

Pitágoras

(Grecia, 569-475 a.C.)



Pitágoras es frecuentemente reconocido como un matemático puro. Fue una persona muy importante para el desarrollo de la matemática de su tiempo, aunque no se conoce nada directamente de sus escritos, ya que la sociedad en que vivió –religiosa científica– seguía códigos secretos que convirtieron a Pitágoras en una figura misteriosa.

Hoy en día se lo recuerda por su famoso teorema, que aunque ya era conocido por los babilonios mil años antes, él fue el primero en demostrar.

Ante todo, Pitágoras fue un filósofo. Fundó una escuela en la que cultivó su doctrina. Tuvo muchos seguidores, que no tenían posesiones y eran vegetarianos. Ellos hicieron muchas contribuciones a la matemática de su época.

Es difícil, hoy en día, acostumbrados a las abstracciones matemáticas y a las generalizaciones, comprender las contribuciones de los pitagóricos.

1

NÚMEROS REALES

1 – NECESIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

No existe un número racional **r** tal que

$$r = \sqrt{2}$$

Se demuestra por el absurdo. Suponiendo que existen dos enteros **p** y **q** primos entre sí, tal que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad \text{o sea, que} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2 \times q^2$$

Así, $\mathbf{p^2}$ debe ser par, lo que implica que **p** es par y, por lo tanto, $\mathbf{p^2}$ tiene dos factores **2**. Entonces, $\mathbf{q^2}$ debe ser par y **q** también.

Pero esto es absurdo, pues se supuso que **p** y **q** eran primos entre sí.

La palabra *racional* proviene del latín *ratio*, que significa 'razón' o 'cociente', y se usa para aquellos números que pueden escribirse como cociente de dos enteros. Por tanto, aquellos números que no podían ser cociente de dos enteros pasaron a llamarse *números irracionales*. Los números racionales, ampliados con los irracionales, forman el conjunto de los números reales.

Véase Duffour, G. *Matemática de quinto*
«Introducción a los conjuntos numéricos»

Axiomática

En términos generales, el punto de vista axiomático puede describirse como sigue.

Probar un teorema en un sistema deductivo consiste en hacer ver que el teorema es una consecuencia lógica y necesaria de ciertas proposiciones previamente establecidas, que a su vez deben ser probadas, y así sucesivamente.

El proceso de demostración matemática sería, por tanto, una tarea imposible de regresión infinita, salvo que, en esta marcha hacia atrás, esté permitido detenerse en algún punto. Por tanto, debe de haber un número de proposiciones, llamadas *postulados* o *axiomas*, que son aceptadas como verdaderas, y para las cuales no se requiere ninguna demostración.

De estas podemos intentar deducir todos los teoremas por medio de argumentos puramente lógicos.

Si los hechos de un campo científico pueden colocarse en un orden lógico tal que sea posible deducir todo de un cierto número de aserciones previamente elegidas (preferentemente pocas, sencillas y adecuadas), entonces se dice que este campo está presentado en forma axiomática.

A pesar de que la forma axiomática es un ideal, es una peligrosa falacia creer que la axiomática constituye la esencia de la matemática.

Extraído de:
Courant, R. y Robbins, H. (1979).
¿Qué es la matemática?
Madrid, Aguilar.

2 – INTRODUCCIÓN

Existen dos enfoques diferentes para estudiar los números reales. Por un lado, el enfoque constructivista, que construye el conjunto de los números reales a partir de los racionales, estos a partir de los enteros, y los enteros a partir de los naturales. Por otro lado, se encuentra el enfoque axiomático. En este último, el concepto de número real es tomado como un concepto primitivo, que satisface un cierto número de propiedades que se toman como axiomas, y a partir de los cuales se desarrollan las consecuencias lógicas correspondientes.

El sistema de los números reales puede describirse como un *cuerpo ordenado completo*. Sin embargo, para mayor claridad se prefiere no enunciar todas las propiedades de los números reales a la vez. Por ello se agrupan los axiomas en tres grupos.

Axiomas de cuerpo, en donde se presentan las propiedades algebraicas, llamadas de *cuerpo*, basadas en las operaciones de suma y multiplicación. Postulan que el conjunto de los números reales es un *cuerpo*.

Axiomas de orden, en donde se presentan las propiedades de orden y algunas de sus consecuencias, junto con varias desigualdades que ilustran el uso de estas propiedades. Postulan que el conjunto de los números reales es un *cuerpo ordenado.*

Axioma de completitud o del extremo superior, el cual permite decir que el conjunto de los números reales es un *cuerpo ordenado completo*. Este último axioma es el que verdaderamente distingue al cuerpo de los números reales del cuerpo de los números racionales (que también es un cuerpo ordenado, pero no completo).

3 – AXIOMAS DE CUERPO Y PROPIEDADES

3.1. LOS AXIOMAS

Mediante este conjunto de axiomas se define la estructura algebraica básica de los números reales, de manera que las demás propiedades pueden deducirse como teoremas.

Junto al conjunto de números reales se definen axiomáticamente dos operaciones **(axioma 0)** llamadas *adición* y *multiplicación*, simbolizadas por **+** y **.** Para cada par de números reales **a** y **b**, la adición **a + b** y la multiplicación **a . b** dan por resultado otro número real.

Función suma

La suma y el producto de números reales pueden pensarse como funciones.

Así, +: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función que toma dos números reales y devuelve otro, llamado suma de los otros dos, o sea:

$$+\,(x, y) = x + y$$

Función producto

Del mismo modo, el producto de números reales es una función cuyo dominio, al igual que la suma, son las parejas de números reales. A cada pareja se le asocia un cierto valor, llamado producto:

$\bullet : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que:

$$\bullet\,(x, y) = x \,.\, y$$

Véase el tema «funciones», en el capítulo siguiente.

AXIOMA 1 **Propiedad conmutativa**

Para todo **a**$\in\mathbb{R}$ y **b**$\in\mathbb{R}$

En la suma: **a + b = b + a**

En la multiplicación: **a . b = b . a**

Cualquiera sea el orden en que se consideran los números que intervienen en la suma o multiplicación se obtiene el mismo resultado. Expresado de otro modo, es posible cambiar (conmutar) el orden en que se consideran ambos números, sin que por ello se altere el resultado de la operación.

AXIOMA 2 **Propiedad asociativa**

Para todo **a**$\in\mathbb{R}$**,** **b**$\in\mathbb{R}$ y **c**$\in\mathbb{R}$

En la suma: **a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c**

En la multiplicación: **a . (b . c) = (a . b) . c = a . b . c**

Lo cual significa que, en la suma o multiplicación de varios números, estos se pueden agrupar (asociar) de diversas maneras, sin que por ello se altere el resultado de la operación.

AXIOMA 3 **Existencia de elementos neutros**

En la suma

Existe un número **0**$\in\mathbb{R}$ («cero perteneciente a los reales») tal que para todo **a**$\in\mathbb{R}$ se cumple que: **a + 0 = 0 + a = a**

El neutro de la suma, sumado a un número antes (a la izquierda) o después (a la derecha), resulta el propio número.

En la multiplicación

Existe un número **1**$\in\mathbb{R}$ («uno perteneciente a los reales») tal que para todo **a**$\in\mathbb{R}$ se cumple que: **a . 1 = 1 . a = a**

El neutro de la multiplicación, multiplicado por un número antes (a la izquierda) o después (a la derecha), resulta el propio número.

Usualmente, al neutro de la suma se le llama *cero* o *nulo*, mientras que al neutro del producto se le llama *unidad.*

Los neutros para la suma y la multiplicación
(simbolizados por el 0 y el 1, respectivamente), son distintos.

AXIOMA 4 **Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma**

Este axioma vincula a las dos operaciones y postula cómo estas interactúan. (Los axiomas anteriores se refieren a cada operación por separado.)

Para todo **a**$\in\mathbb{R}$**,** **b**$\in\mathbb{R}$ y **c**$\in\mathbb{R}$

a . (b + c) = a . b + a . c **(b + c) . a = b . a + c . a**

La multiplicación es distributiva con respecto a la suma, tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad. Una vez que se tiene la conmutativa, alcanza con que se cumpla la distributiva a un lado para que también se cumpla la otra.