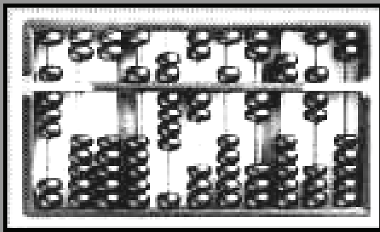
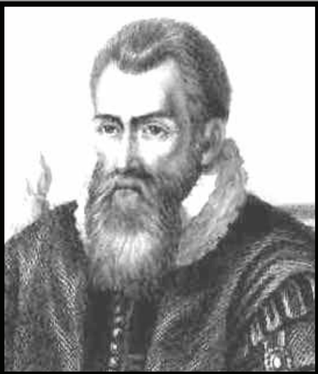
Uno de los primeros medios de que se valió el hombre para hacer sus cálculos, fue el ábaco. Desde los tiempos más antiguos, esta invención se transmitió de civilización en civilización. Todavía hoy, el uso del ábaco es muy corriente en algunos pueblos de Asia, en donde no es muy difícil encontrar personas que calculan más deprisa que los oficinistas con sus máquinas calculadoras. Pero en el siglo XVI, los cálculos requeridos en la astronomía y la navegación eran largos y complicados, y los errores frecuentes.



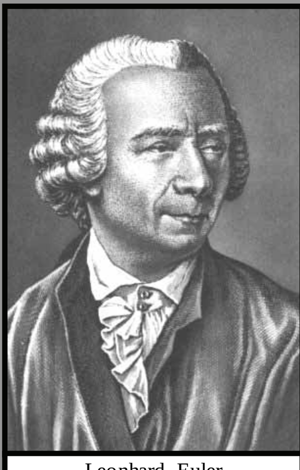
Aunque las ideas fundamentales de los logaritmos se pueden encontrar desde la época de Arquímedes, la invención de los logaritmos, casi como los conocemos ahora, se adjudican a John Napier, quien en 1614 publicó en latín *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ('*Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos*'). Napier nació cerca de Edimburgo, Escocia, en 1550, y murió allí en 1617.



John Napier
(Escocia, 1550-1617)

Después de que Napier publicó su primer trabajo, el profesor londinense Enrique Briggs (1556–1630) viajó a Edimburgo y pasó más de un mes discutiendo con él los trabajos que aquel había realizado. Briggs adoptó como base de los logaritmos el número 10 y se abocó a la penosa tarea de calcular y preparar las primeras tablas de logaritmos decimales.

Pero fue Leonhard Euler (1707-1783), quien dio por primera vez la definición de logaritmo como una operación inversa. Euler utiliza por primera vez la notación e, base de los logaritmos neperianos, al parecer sugerido por la primera letra de la palabra *exponencial*. Históricamente ha sido usada con más regularidad la base 10 y los logaritmos resultantes se llaman logaritmos comunes. Pero en el cálculo superior y en todas las matemáticas avanzadas la base más utilizada es el número e.



Leonhard Euler
(Suiza, 1707-1783)

Napier, Briggs y otros presentaron los logaritmos al mundo hace casi 400 años. Estos se usaron durante 350 años como la herramienta principal en los cálculos aritméticos. Una cantidad asombrosa de esfuerzo se ahorró por el uso de los logaritmos, como dijo Laplace: *el uso de los logaritmos acortó el trabajo y duplicó la vida de los astrónomos*.

Entonces el mundo cambió: apareció la calculadora de bolsillo. El logaritmo sigue siendo una función matemática importante, pero su uso para facilitar los cálculos se ha ido para siempre.

14

LOGARITMOS

1 – CONCEPTOS PREVIOS

Si en lugar de la igualdad $2^3 = 8$

se tuviese la ecuación: $2^x = 8$

NOTA
Obsérvese que la incógnita **x** *se encuentra en el exponente.*

Para hallar la incógnita **x** se debe definir una nueva operación denominada *logaritmación*.

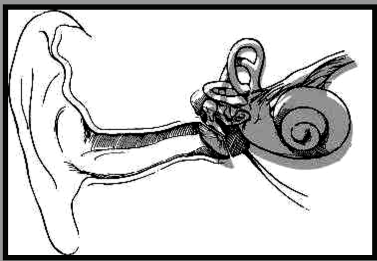
$$2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2 8$$

x es el logaritmo de **8** en base **2**

Calcular entonces el número **x** al que se debe elevar el **2** para obtener **8**, es la operación inversa de la exponenciación.

El decibel

Una escala logarítmica



El sonido más débil que un oído sano puede escuchar o detectar tiene una amplitud de una veinteava millonésima de un pascal (20 mPa), algo así como cinco mil millones de veces menor que la presión atmosférica normal.

Un cambio de presión de 20 mPa es tan pequeño que hace que la membrana del oído se deflecte una distancia menor que el diámetro de una sola molécula de hidrógeno.

Sorprendentemente, el oído puede tolerar presiones sonoras de hasta un millón de veces más alta que esta. Así, si se mide el sonido en pascales, resultan números muy grandes y poco manejables. Para evitar esto se usa otra escala, *el decibel* (db).

El decibel es una relación matemática del tipo logarítmico, donde si se aumenta 3 db un ruido, significa que se aumenta al doble la energía sonora percibida.

El umbral de audición está en el 0 db, y el umbral de dolor en los 120 db.

2 – DEFINICIÓN

Si $c^x = b$ se cumple que: $x = \log_c b$

$x \in \mathbb{R}$

$b \in \mathbb{R}^+$

$c \in \mathbb{R}^+ \quad c \neq 1$

Véase «Existencia» en la página 307.

El logaritmo de un número positivo **b**, respecto a una base **c** (positiva y distinta de uno), es el exponente x a que debe elevarse la base **c** para obtener **b**.

EJEMPLO: Calcular $\log_2 64$

Para el cálculo del logaritmo propuesto se debe aplicar la definición antes dada y utilizar las propiedades de la potencia.

$$\log_2 64 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 64$$

¿Cuál es la potencia de 2 que da 64? $x = 6$

Pues $2^6 = 64 \Rightarrow \boxed{\log_2 64 = 6}$

EJEMPLO: Calcular x en: $\log_3 x = 2$

Se aplica la definición de logaritmo.

$$\log_3 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 9}$$

e

Al igual que π, el número e es de mucha importancia en las matemáticas.

El uso de la letra e para representar a este número se debe a Leonhard Euler, el primero en reconocer su transcendencia. Por otra parte, con esta letra comienza la palabra *exponencial*.

La importancia del número e radica en su uso como base para la función exponencial natural.

$$f\colon f(x) = e^x$$

$$e = 2{,}71828\ldots$$

La definición rigurosa del número e y su cálculo escapan a este curso.

En la página 101, puede encontrarse una aproximación a este tema.

3 – NOTACIÓN

Los logaritmos que más se empleaban en los cálculos usuales eran los que tienen por base 10, llamados también decimales o de Briggs. En estos logaritmos se acostumbra a omitir la escritura de la base.

NOTACIÓN Logaritmo decimal de **x**: $\log x$

Los logaritmos de base **e** se llaman **neperianos**.

NOTACIÓN: $\ln x$ ó Lx

NOTA

Se altera el desarrollo común del tema, y se estudian primero las propiedades básicas de los logaritmos, para luego analizar las condiciones de existencia, las ecuaciones logarítmicas y las gráficas logarítmicas.

En las propiedades que se ven a continuación, se da por supuesta la existencia de los logaritmos involucrados.

La calculadora

Logaritmo base = 10

Logaritmo base = e

Recordemos que el objetivo de este capítulo es conocer la función logaritmo y aprender a utilizar las propiedades de los logaritmos.

En la calculadora no se les dará ningún uso a las teclas de logaritmos.

4 – OPERACIONES CON LOGARITMOS, TEOREMAS

4.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS LOGARITMOS

$$\log_c 1 = 0$$

El logaritmo de uno es cero en cualquier base.

Pues se cumple que $\mathbf{c^0 = 1}$ para todo $\mathbf{c \in \mathbb{R}^+}$ $\mathbf{c \neq 1}$

Ejemplos: $\log_2 1 = 0$ $\log_7 1 = 0$

$$\log_c c = 1$$

El logaritmo de la base es uno.

Pues se cumple que $\mathbf{c^1 = c}$ para todo $\mathbf{c \in \mathbb{R}^+}$ $\mathbf{c \neq 1}$

Ejemplos: $\log_5 5 = 1$ $\log_{10} 10 = 1$

Antes de continuar, es conveniente hacer los ejercicios 355 y 356, de la página 314.