Existe una leyenda sobre el origen del juego de ajedrez, aunque la época exacta en que se desarrollaron los acontecimientos no se conoce.

Este juego fue inventado por un pobre y modesto súbdito de un poderoso reino de la India, y ofrecido como un insignificante obsequio a su rey.

El rey quedó tan contento de recibirlo que le contestó de la siguiente manera:

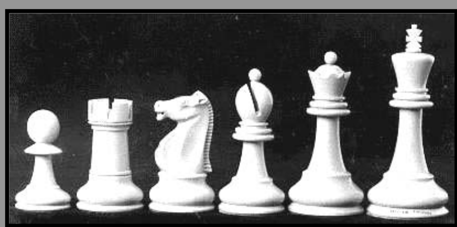
– No creí nunca que el ingenio humano pudiera producir maravillas como este juego, tan interesante a la vez que instructivo. Moviendo esas simples piezas, aprendí que un rey nada vale sin el auxilio y la dedicación constante de sus súbditos, y que a veces, el sacrificio de un simple peón vale más para la victoria que la pérdida de una poderosa pieza.

Quiero recompensarte, amigo mío, por este maravilloso obsequio. Pide pues lo que desees, para que yo pueda demostrar una vez más, cuán agradecido soy con aquellos que son dignos de una recompensa.

El joven rechazó riquezas, joyas, palacios, y tan solo pidió:

– Deseo mi recompensa en granos de trigo. Dadme un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así duplicando sucesivamente hasta la casilla 64.

El rey no lo podía creer, pero indicó a sus matemáticos que hicieran los cálculos y cumplieran con el pedido.



Pregunta para el alumno:

¿Cómo termina la leyenda?
¿Pudo el rey cumplir con el pedido?
¿Por qué si o por qué no?

Extraído de: Malba Tahan; *El hombre que calculaba.* Bagdad: Siglo XIV.

13

FUNCIÓN EXPONENCIAL

NOTA

Una función se denomina exponencial cuando la variable aparece en el exponente.

Es importante que el estudiante sepa trabajar muy bien con potencias, ya que muchas de sus propiedades son necesarias para estudiar funciones exponenciales.

1– REPASO DE POTENCIACIÓN

1.1. DEFINICIÓN

Se define la potenciación como una multiplicación reiterada.

$$\overbrace{a \times a \times a \times a \ \dots \ a}^{\text{n veces}} = a^n$$

Como es tan solo un repaso, las propiedades de la potenciación que se dan a continuación, no se demuestran.

$$a^n$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

$$n \in \mathbb{R}$$

En todo el capítulo se trabajará con expresiones de base positiva y distinta de uno.

Si la base es negativa, cero o uno, pueden surgir operaciones que no están definidas en los números reales, o su estudio no es de interés en este curso.

Incluso pueden presentarse operaciones en las que el resultado no sea único.

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = +2$$

Es lógico definir las potencias cuando **n** es un número natural, pero las propiedades se cumplen con **$n \in \mathbb{R}$**.

EJEMPLO: Calcular **a)** $(2)^3$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

a) $(2)^3 = (2)\times(2)\times(2) = \boxed{\mathbf{8}}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{\mathbf{\frac{4}{9}}}$

1.2. PRODUCTO DE POTENCIAS

$$\mathbf{a^n \times a^p = a^{n+p}}$$

Para multiplicar dos potencias de ***igual base*** *se mantiene la misma base y se suman los exponentes.*

EJEMPLO: Calcular $(2)^3\times(2)^7$

Se aplica directamente la propiedad.

$(2)^3\times(2)^7 = 2^{3+7} = \boxed{\mathbf{2^{10}}}$

En estos ejemplos de repaso de potenciación no interesa el resultado final de la operación. El objetivo es aplicar correctamente las propiedades de la potencia.

1.3. COCIENTE DE POTENCIAS

$$\mathbf{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$$

Para dividir dos potencias de ***igual base*** *se mantiene la misma base y se restan los exponentes.*

Debe estar claro para el estudiante que $\mathbf{a \neq 0}$.

EJEMPLO: Calcular $\dfrac{3^7}{3^4}$

Se aplica directamente la propiedad anterior.

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = \boxed{3^3}$$

EJEMPLO: Calcular $\dfrac{2^3 \times 2^6}{2^7}$

Primero se pueden multiplicar las potencias de igual base: $\dfrac{2^3 \times 2^6}{2^7} = \dfrac{2^9}{2^7}$

Luego se dividen las potencias de igual base:

$$\frac{2^9}{2^7} = 2^{9-7} = \boxed{2^2}$$

DESAFÍO OLÍMPICO

XV Olimpíada matemática del Uruguay
Primera instancia 2000

Hallar n para que sea válida la siguiente igualdad:

$$\left(10^{12} + 25\right)^2 - \left(10^{12} - 25\right)^2 = 10^n$$

Véase el resultado en la página 455.

1.4. POTENCIA DE UN PRODUCTO O DE UN COCIENTE

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

La potencia de un producto o de un cociente es igual al producto o cociente de las potencias de cada factor.

La base **b** debe cumplir las mismas condiciones que **a.**

Véase el principio de este capítulo.

EJEMPLO: Calcular $\dfrac{(5 \times 3)^7}{5^7 \times 3^4}$

$$\frac{(5 \times 3)^7}{5^7 \times 3^4} = \frac{5^7 \times 3^7}{5^7 \times 3^4} = \frac{\cancel{5^7} \times 3^7}{\cancel{5^7} \times 3^4} = 3^{7-4} = \boxed{3^3}$$

Se aplican las propiedades ya estudiadas.