Desde la antigüedad, el hombre ha observado que distintos objetos y fenómenos que aparecen en la naturaleza están relacionados entre sí, lo que posibilita establecer una correspondencia de causa-efecto entre ellos.

Imagínese una función como una máquina que le hace corresponder a un elemento de un primer conjunto, un elemento bien definido de un segundo conjunto. Así también, es posible usar dos o más máquinas (funciones), de forma tal que el resultado de la primera máquina alimente a la segunda máquina (función de función).

Por lo tanto, una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x, de un conjunto llamado dominio, un único objeto f(x) de un segundo conjunto. Esta definición no impone restricciones a los conjuntos citados, pero no permite que a una entrada le corresponda más de una salida.

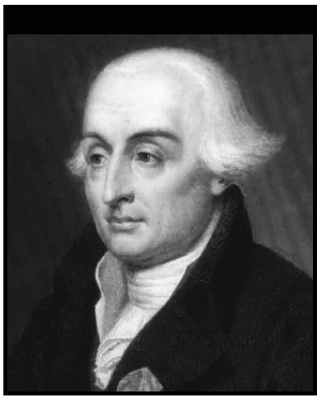
La teoría de funciones se convirtió en el problema preliminar del análisis infinitesimal. El concepto de función tenía dos aspectos: la función como correspondencia y la función como expresión analítica. En el transcurso de los años treinta y cuarenta del siglo XVIII, en lo fundamental gracias a Euler, fue cuando se elaboró, sistematizó y clasificó la teoría de las funciones elementales analíticas.

Pero el trabajo más serio fue: *Teoría de las funciones analíticas,* **de Lagrange.**

En la actualidad, el concepto de función es una noción matemática fundamental en todas las ciencias. Ya sea en Física, Química, Mecánica, Medicina,... el estudio de numerosos problemas conduce a establecer fórmulas (funciones) que permiten relacionar dos (o más) cantidades variables.

Joseph Louis Lagrange

(Italia, 1736-1813)



Habitualmente se considera que Joseph Louis Lagrange era un matemático francés, pero la *Enciclopedia italiana* se refiere a él como un matemático Italiano, lo cual es muy razonable, pues Lagrange nació en Turín y fue bautizado con el nombre de Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Una especulación insensata, llevada a cabo por su padre, abandonó a Lagrange a sus propios recursos a una edad temprana. Pero este cambio de fortuna no resultó ser una gran calamidad, «pues de otro modo –dijo él– tal vez nunca hubiera descubierto mi vocación».

Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. A los dieciséis años de edad fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín, donde el tímido muchacho –que no poseía recursos de oratoria y era de muy pocas palabras– mantenía la atención de hombres bastante mayores que él.

Lagrange estaba dispuesto a apreciar el trabajo sutil de los demás, pero estaba igualmente capacitado para descubrir errores. En una temprana memoria sobre las matemáticas del sonido señaló defectos, incluso en la obra de Newton. Otros matemáticos lo reconocían, sin envidia, primero como su compañero y, más tarde, como el mayor matemático viviente.

4

RELACIONES Y FUNCIONES

> **(x, y)**
>
> **Comúnmente se habla de cuplas, por ser pares ordenados: (a, b) o (x, y).**
>
> **Pueden ser ternas, con tres elementos: (a, b, c).**
>
> **En general se hablará de n-uplas con n elementos.**

1 – PAR ORDENADO

En este capítulo se va utilizará un nuevo concepto, el de *par ordenado* o *cupla,* o sea, dos elementos tomados en un orden.

Con el par ordenado $\mathbf{(a, b)}$ se indicará que el elemento **a** se considera en el primer lugar y el **b** en segundo lugar.

Recuérdese que el par ordenado se escribe entre paréntesis curvos.

Dos cuplas son iguales si y solo si el primer componente de una es igual al primer componente de la otra, y el segundo componente de una es igual al segundo componente de la otra.

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y solo si} \quad a = c \quad y \quad b = d$$

Es necesario no confundir el conjunto $\mathbf{C = \{a, b\}}$, formado por dos elementos, con la cupla $\mathbf{(a, b)}$, pues se cumple:

$$\{a, b\} = \{b, a\} \qquad \text{pero} \qquad (a, b) \neq (b, a) \quad \text{si} \quad a \neq b$$

2 – PRODUCTO CARTESIANO

2.1. DEFINICIÓN

A partir de dos conjuntos (no vacíos) **A** y **B**, es posible definir un nuevo conjunto formado por todas las cuplas que se puedan formar, donde el primer elemento pertenece a **A** y el segundo a **B**.

Se llamará *producto cartesiano* de dos conjuntos **A** y **B**, al conjunto de todas las cuplas $\mathbf{(a, b)}$ tales que $\mathbf{a \in A}$ y $\mathbf{b \in B}$.

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \ \wedge \ b \in B\}}$$

Si el conjunto **A** es de **m** elementos y el conjunto **B** es de **n** elementos, el conjunto producto $\mathbf{A \times B}$ es de $\mathbf{m \times n}$ cuplas.

EJEMPLO: Dado $A=\{2,4,6\}$ $B=\{m,n,q\}$ hallar $A\times B$

Una manera segura de hallar el producto cartesiano entre dos conjuntos es disponer sus elementos en forma de tabla o cuadro de doble entrada, formando una columna con los elementos del primer conjunto y una fila con los del segundo conjunto.

	m	**n**	**q**
2	(2, m)	(2, n)	(2, q)
4	(4, m)	(4, n)	(4, q)
6	(6, m)	(6, n)	(6, q)

La extensión de: $A \times B = \{(2,m),(4,m),(6,m),(2,n),(4,n),(6,n),(2,q),(4,q),(6,q)\}$

EJEMPLO: Dado $A = \{a,b,c\}$ hallar $A \times A$

El producto cartesiano puede efectuarse entre los elementos de un solo conjunto, formando todos los pares ordenados posibles con los elementos de ese conjunto.

	a	**b**	**c**
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

La extensión de: $A \times A = A^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

Antes de continuar, es conveniente hacer el ejercicio 46, de la página 72.

Los de antes sí que eran exámenes

Examen 5º Humanístico
Diciembre 1987, Liceo de Solymar

Nos proponemos fabricar distintos tipos de zapatos (pares), pudiendo elegir sus especificaciones entre los elementos de los siguientes conjuntos:

Conjunto de cueros: A = {cabrito, antílope, potro, sintético}
Conjunto de suelas: B = {cuero, goma}
Conjunto de estilos: C = {balmoral, derby, mocasín}
Conjunto de colores: D = {negro, marrón, blanco}

a) Dar tres ejemplos en forma de n-uplas ordenadas, de tipos de zapatos posibles con dichas especificaciones.
b) Hallar el número total de tipos diferentes que se pueden fabricar con dichas especificaciones.
c) ¿Cuántos zapatos con suela de goma hay una vez fabricados todos?

Véanse los resultados en la página 472.

2.2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

1) En el caso de tener en cuenta al conjunto vacío.
El producto cartesiano entre dos conjuntos tiene como resultado el conjunto vacío, si por lo menos uno de los conjuntos es vacío.

Sean los conjuntos **E** y **F**; $E \times F = \phi$ si y solo si $E = \phi$ y/o $F = \phi$

2) El producto cartesiano es distributivo con respecto a la unión y con respecto a la intersección de conjuntos.

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $\quad$ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3) El producto cartesiano no es conmutativo.

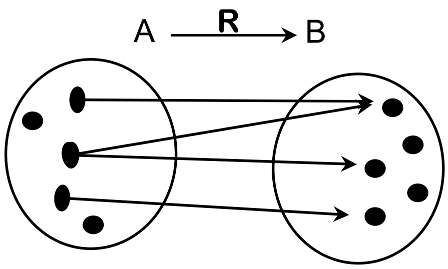
Si $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $A \neq B$, $\quad A \times B \neq B \times A$

4) Si #(A) y #(B) son finitos: $\quad \#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$

El número de cuplas del producto cartesiano es igual al producto del número de elementos de los conjuntos que forman el producto cartesiano.

Entre varios conjuntos finitos se cumple: $\#(A \times B \times C) = \#(A) \times \#(B) \times \#(C)$

3 – RELACIÓN BINARIA



Dados dos conjuntos **A** y **B**, se llama *relación binaria* **R** de **A** en **B**, a una ley o criterio que hace corresponder a elementos de **A**, elementos de **B**.

Toda relación binaria de un conjunto **A** en un conjunto **B** es un subconjunto del producto cartesiano **A×B**.

O sea que: **R** es una relación de **A** en **B** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{R \subseteq A \times B}$

De modo que *una relación binaria es un conjunto de cuplas, tal que sus elementos cumplen una determinada propiedad.*

La relación binaria **R** de **A** en **B** se anota: $\boxed{R = \{(a, b) \ / \ (a, b) \in A \times B, \ a R b\}}$

Una relación binaria **R** se puede establecer entre los elementos de un solo conjunto.

Se anota: $\mathbf{R = \{(a, b) \ / \ (a, b) \in A \times A, \ a R b\}}$