V. Proyecto de exploración matemática para estudiantes de secundaria: Las huellas efímeras[1] de la geometría dinámica

Algunas calculadoras modernas[2] vienen dotadas de programas de "geometría dinámica" tales como el "Geometer's Sketchpad" o el "Cabri Geometry". Estos programas permiten la exploración "dinámica" en escenarios artificialmente creados para la experimentación y la formulación de conjeturas geométricas. A continuación presentamos algunos ejemplos.

Suponga que se tiene un círculo con centro A y que en él inscribimos el triángulo CDE. Luego dibujamos las medianas CH, DF y EG como se muestra a la izquierda de la Figura 1. Una observación difícil de escapar es que las medianas del triángulo inscrito parecen todas cortarse en un punto común I, tal y como lo predice el famoso teorema de la geometría plana. La ventana derecha de la Figura 1 muestra el mismo círculo con su triángulo inscrito, pero en el ella hemos ocultado las medianas; el punto I es, desde luego, el punto de intersección de las medianas (baricentro o centroide).

Nos preguntamos, ¿qué le ocurre al punto de intersección de las medianas cuando movemos el punto D a través de la circunferencia. Si empleamos los recursos de la calculadora para dar "animación" a este movimiento, llegamos a la ventana que se presenta en la Figura 2. Un examen perfunctorio de la ventanilla obtenida muestra que el lugar geométrico deseado parece ser un círculo y que el mismo corta de forma "simétrica" el lado del triángulo opuesto al punto móvil (CE). Algunos estudiantes que han considerado este problema conjeturan correctamente que el círculo del lugar geométrico triseca el lado opuesto al punto móvil y partiendo de este dato pueden calcular el radio y localizar el centro del círculo del lugar geométrico. En efecto, el círculo del lugar geométrico es la imagen homotésica del círculo original; dejamos al

[1] Esta es una alusión al los lugares geométricos que se representan en el "Geometer's Sketchpad", los cuales son poco manejables por el usuario del programa.

[2] Como la TI-92 para la cual están disponibles ambos programas

lector la determinación del centro de la homotesia[3] y el factor de contracción correspondiente.

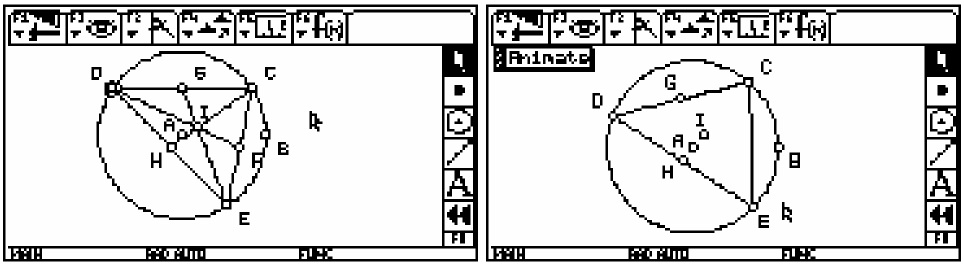

Figura 1: Punto de intersección de las medianas de un triángulo inscrito en un círculo

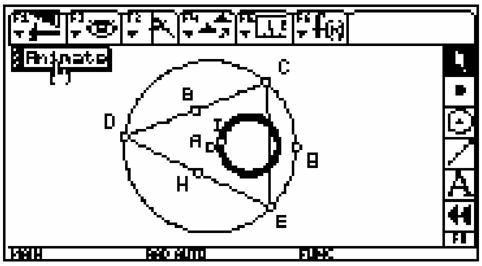

Figura 2: Lugar geométrico de la intersección de las medianas

Problemas análogos al aquí propuesto sobre las medianas lo son los problemas correspondientes para otras dos cevianas[4] notables: las alturas y las bisectrices angulares. Consideremos primeramente las alturas. De nuevo, la geometría plana nos enseña que las alturas se cortan en un punto común llamado ortocentro. En la pantalla de la izquierda de la Figura 1 vemos un triángulo inscrito en un círculo con centro A, cuyas alturas se cortan en el punto F. A la derecha se han ocultado las alturas, pero no así el ortocentro F. En este ejemplo se puede observar que es posible que el ortocentro quede fuera del triángulo (si el triángulo es obtusángulo).

Nos preguntamos por el lugar geométrico del ortocentro a medida que uno de los puntos del triángulo se mueve alrededor del círculo (digamos C). La Figura 10 muestra el lugar geométrico observado. Ciertamente el lugar geométrico parece ser un círculo

[3] Es decir, una contracción del plano respecto a un punto fijo (centro de la homotesia).
[4] Una ceviana de un triángulo es un segmento que une un vértice del mismo con un punto interior del lado opuesto al vértice.

congruente al círculo original. ¿Cuál es su centro? ¿Cuál es la conjetura correspondiente? Instamos al lector a proveer las contestaciones a estas preguntas.

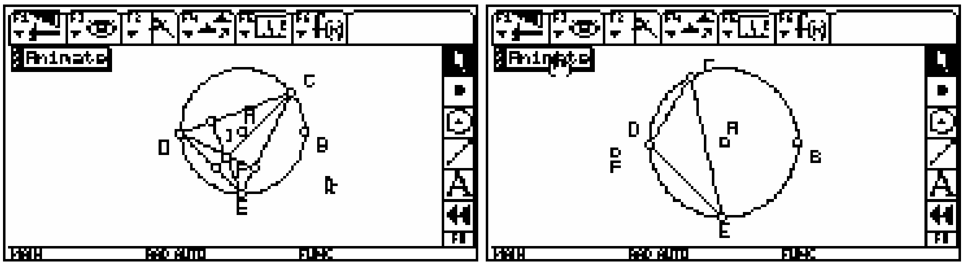

Figura 3: Intersección de las alturas de un triángulo

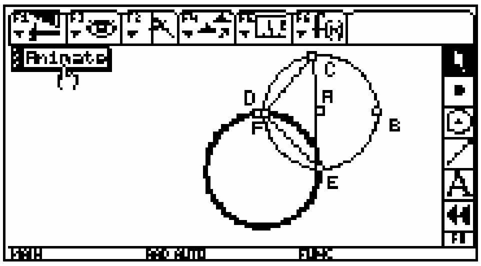

Figura 4: Lugar geométrico del ortocentro

Ahora nos ocupamos de las bisectrices angulares, cevianas cuya intersección común se conoce como inradio, siendo el centro del círculo inscrito en el triángulo. En la pantalla de la izquierda de la Figura 5 se aprecia un círculo de centro E y el incentro D (las bisectrices angulares se han ocultado). En la ventana de la derecha se aprecia el lugar geométrico del punto D a medida que C se mueve a lo largo del círculo en el que está inscrito el triángulo ABC.

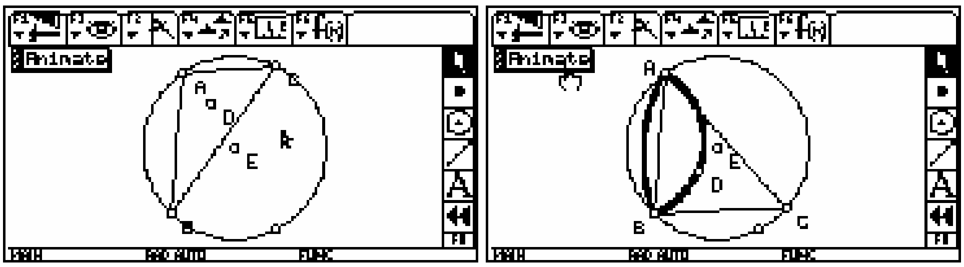

Figura 5: Lugar geométrico del incentro

Si en lugar de tomar las bisectrices angulares internas combinamos dos bisectrices externas y una interna, se obtienen resultados muy interesantes. En la pantalla de la izquierda de la Figura 6 se observa el punto G, el cual es la intersección de la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de EC en el extremo C y la bisectriz del ángulo E (la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de ED en D y el lado DC también, se demuestra, pasa por G). Decimos que el punto G es un excentro del triángulo ECD.

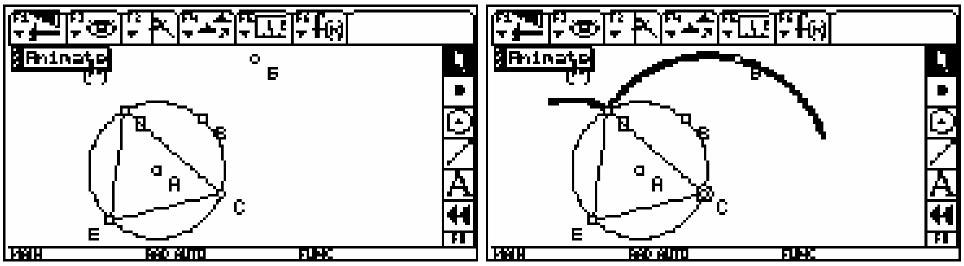

Figura 6: Lugar geométrico de un excentro

Ciertamente parecería que la Figuras 5 y 6 muestran porciones distintas de dos "ciertas" circunferencias. También parecería que la frontera que determina lo que se puede apreciar de las circunferencias del lugar geométrico en la Figura 6 es la recta perpendicular al segmento ED en el extremo D. Parece que hay una cierta conjetura en "el aire".

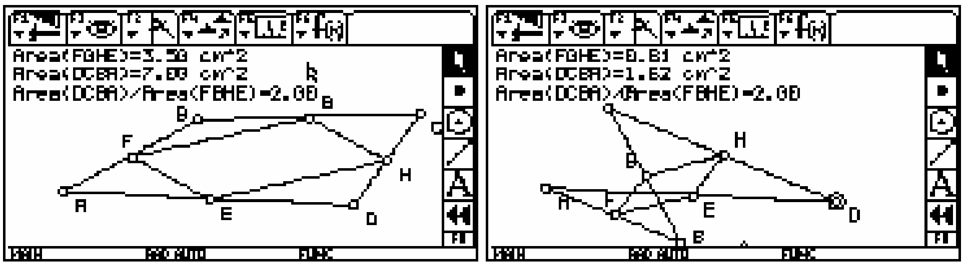

Figura 7: Cuadrilátero inscrito es un paralelogramo

Hemos visto pues cómo es posible emplear la calculadora como instrumento útil en el descubrimiento de relaciones geométricas de carácter "dinámico" como las descritas anteriormente. No se debe menospreciar la posibilidad que tienen estos programas geométricos para desarrollar los "ojos de la imaginación" y la capacidad que todos tenemos para la visualización geométrica.

Consideremos un ejemplo final. Suponga que tenemos un cuadrilátero ABCD y que construimos el cuadrilátero que se forma al unir consecutivamente los puntos medios del cuadrilátero original. De la observación de las ventanas de la Figura 7 parecería que el cuadrilátero formado es un paralelogramo y que ello no depende de la convexidad o falta de ella del cuadrilátero original. También, las medidas indican que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero original. Dejamos al lector el enunciado y la prueba de la conjetura correspondiente. Dicho sea de paso, el enunciado de esta conjetura podría decirse que es uno "post-euclídeo" ya que no aparece en *Los Elementos* de Euclides.

Referencias

Las actividades aquí descrita se han tomado de las siguientes fuentes:

Campistrous, L. A., López, J. M. (2001), La calculadora como herramienta heurística, Revista Uno, Número 28, páginas 84-99.

Lopez, J. M. (2002) Problemas de investigación matemática para la escuela secundaria, Fascículo de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM), Universidad de Puerto Rico, Río Piedras