IV. Proyecto de exploración matemática para estudiantes de secundaria: El problema de las ratas holandesas

El biólogo holandés Maarten't Hart estudió el desarrollo de poblaciones de ratas. El siguiente es un resumen de uno de sus escritos sobre ratas: *"Estimo que en promedio una hembra pare 6 ratas, 3 machos y 3 hembras. El periodo de gestación es de 21 días así como el periodo de lactancia. A pesar de que las hembras podrían concebir nuevamente durante el periodo de lactancia, para simplificar la situación supondré que la hembra podrá parir nuevamente otras 6 ratas (3 machos y 3 hembras) luego de pasados 40 días desde su último parto. Las hembras recién nacidas podrán a su vez parir luego de pasados 120 días. Si suponemos que los nacimientos siempre consisten de 3 hembras y 3 machos, entonces si una pareja de ratas tiene progenie el primero de enero, el número total de ratas el próximo primero de enero (contando la pareja original de la primera parida) será de 1808.*

Nuestro problema es el de determinar si Hart predijo correctamente el número total de ratas luego de un año. Más generalmente nos interesa determinar fórmulas recursivas y directas del fenómeno descrito. La experimentación en este problema no resulta ser una particularmente sencilla (invitamos al lector a que lo intente), pero luego de varios intentos generamos una tabla como la siguiente:

Tiempo	-1	0	1	2	3	4	5	6
Número de parejas	1	4	7	10	22	43	73	139

Figura 1: Parejas de ratas

En la tabla, hemos tomado el tiempo en unidades de 40 días. Si denotamos por N_t el número de parejas de ratas en el periodo de tiempo t, un poco de experimentación muestra que la relación

$$N_{t+3} = N_{t+2} + 3N_t, \quad t \geq -1, \qquad (4)$$

tomando -1 como cuarenta días antes de enero 1, cuando teníamos una pareja en la que la hembra comenzaba la gestación. Vemos además que $N_{-1} = 1$, $N_0 = 4$ y $N_1 = 7$. Estas relaciones definen recursivamente la sucesión de la cantidad de pares de ratas y la pregunta original se puede plantear de la siguiente manera: ¿ocurre el valor 904 entre los valores que asume la sucesión de los N_t? Continuando el cálculo sucesivo de los números de parejas de ratas, vemos que en 9 períodos de 40 días, es decir, en 360 días, habrán 904 parejas. Claramente, luego de transcurridos los días adicionales necesarios para completar el año, aún habrá el mismo número de parejas. De la relación (4) se obtiene (al dividir ambos lados de la ecuación por N_{t+1}):

$$\frac{N_{t+3}}{N_{t+2}}\frac{N_{t+2}}{N_{t+1}} = \frac{N_{t+2}}{N_{t+1}} + \frac{3}{\frac{N_{t+1}}{N_t}}. \qquad (5)$$

Si suponemos que las razones N_{t+1}/N_t se aproximan a un cierto número real x, como lo sugiere un poco de experimentación; por ejemplo, en el caso de t=8, tenemos que N_9/N_8 = 904/487 ≅ 1.85626 y para t=20, tenemos N_{21}/N_{20} = 1600312/858799 ≅ 1.86343. De la relación (5) se obtiene:

$$x^2 = x + 3/x, \text{ es decir,}$$

$$x^3 - x^2 - 3 = 0. \qquad (6)$$

Si se "resuelve" esta última ecuación, se obiene un valor aproximado de 1.86371 para su raíz real; véase la gráfica de la Figura 2.

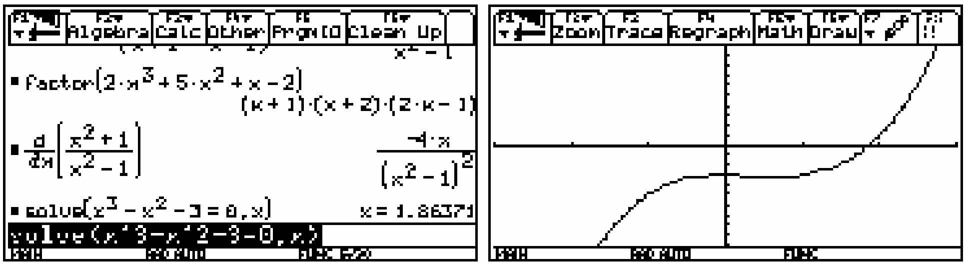
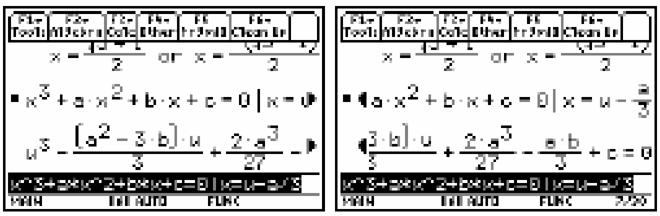


Figura 2: Raíces de la ecuación (6)

Ahora hacemos una breve aparte para discutir la solución de la ecuación cúbica (6). Reza la historia de la matemática que en 1530 Nicolo Tartaglia descubrió un método para resolver la ecuación cúbica general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pero lo mantuvo en secreto con el fin de poder ganar competencias matemáticas. Engañado por falsas promesas de Gerolamo Cardano (1501 - 1576), Tartaglia le comunicó su método y el mismo fue publicado por Cardano en su obra *Ars Magna* en 1545. Esto originó una agria disputa entre Tartaglia y Cardano en la que llovieron insultos y recriminaciones mutuas. Si comenzamos con la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ y hacemos la transformación u = x + a/3, obtenemos la ecuación $u^3 + px + q = 0$, donde

$$p = \frac{1}{3}\left(a^2 - 3b\right) \text{ y}$$

$$q = \frac{1}{27}\left(2a^3 - 9ab + 27c\right).$$



La ecuación tranformada tiene una solución dada por

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Desde luego, una vez conocida una raíz podemos dividir el factor correspondiente determinado por la raíz, y se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver empleando la fórmula para determinar las soluciones de la ecuación cuadrática.

Si se resuelve la ecuación (6) empleando la fórmula de Tartaglia - Cardano para la solución de la ecuación cúbica, se obtiene que la raíz real esta dada por:

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{83 + 9\sqrt{85}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{83 - 9\sqrt{85}}{2}} + 1\right] \quad (\alpha \approx 1.86371)$$

Las otras dos raíces del polinomio dependen de α y, desde luego, son complejas, la una conjugada de la otra:

$$\frac{-(\alpha - 1) \pm i\sqrt{(\alpha - 1)(3\alpha + 1)}}{2}\ .$$

Es de esperarse que todas estas raíces entren en la fórmula directa que describe la recursión (4). En el caso presente, la recursión también puede ser expresada en forma matricial y las raíces indicadas resultan ser los autovalores de la matriz correspondiente. Dejamos al lector interesado la exploración de estos puntos.

Algunas preguntas interesantes.

1. Escriba la relación (4) en forma matricial y demuestre que los valores propios de la matriz obtenida son

$$\alpha = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{83+9\sqrt{85}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{83-9\sqrt{85}}{2}} + 1\right]$$

$$\beta = \frac{-(\alpha-1) + \mathrm{i}\sqrt{(\alpha-1)(3\alpha+1)}}{2} \quad \text{y}$$

$$\gamma = \overline{\beta} = \frac{-(\alpha-1) - \mathrm{i}\sqrt{(\alpha-1)(3\alpha+1)}}{2}.$$

2. Demuestre que una fórmula directa para la relación (4) es la siguiente:

$$\begin{aligned} N_n = \frac{1}{\gamma^2 + 2\alpha\beta}\{&[7\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha} + 4\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta-\alpha} + \frac{\beta\gamma^2 + \alpha\beta^2 + 3}{\beta-\alpha}]\alpha^{n+1} + \\ &[-7\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} + 4\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha\gamma^2 + \alpha^2\beta + 3}{\beta-\alpha}]\beta^{n+1} + \\ &[7 - 4(\alpha+\beta) + \alpha\beta]\gamma^{n+1}\} \quad \text{para todo} \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Referencias

Las actividades aquí descrita se han tomado de las siguientes fuentes:

Campistrous, L. A., López, J. M. (2001), La calculadora como herramienta heurística, Revista Uno, Número 28, páginas 84-99.

Lopez, J. M. (2002) Problemas de investigación matemática para la escuela secundaria, Fascículo de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM), Universidad de Puerto Rico, Río Piedras