III. Proyecto de exploración matemática para estudiantes de secundaria: Los triples pitagóricos consecutivos

Un *triple pitagórico* es una tríada de enteros no-negativos (x, y, z) que satisface la condición $x^2 + y^2 = z^2$. Por ejemplo, (0, 1, 1), (3, 4, 5) y (9, 12, 15) son triples pitagóricos. En el caso en que un triple pitagórico (x, y, z) satisface la condición x+1=y, decimos que el mismo es un *triple pitagórico consecutivo.* Así pues, (0, 1, 1) y (3, 4, 5) son triples pitagóricos consecutivos, pero no así el triple (9, 12, 14). En efecto, los primeros dos triples pitagóricos consecutivos son (0, 1, 1) y (3, 4, 5). Un problema interesante es el de determinar una formula (recursiva o directa) que genere todos los triples pitagóricos consecutivos (sea o no la colección de éstos infinita).

Ciertamente, este es un problema que invita a la experimentación. Una estrategia heurística que se sugiere de inmediato es la de recolectar una lista suficientemente extensa de triples pitagóricos consecutivos con el fin de intentar descubrir en ella patrones numéricos que nos permitan generar algunas relaciones numéricas que lleven al descubrimiento de las fórmulas deseadas. En esta coyuntura el empleo de la calculadora resulta de mucha utilidad pues nos permite generar la lista deseada sin "dolor" alguno (o muy poco dolor). La calculadora es capaz de generar rápidamente una tabla de números entre los cuales aparecen los triples pitagóricos consecutivos deseados. Por ejemplo, podríamos emplear una tabla que muestre, para valores consecutivos de los enteros positivos x, los valores de x, y = $\sqrt{x^2 + (x+1)^2}$ y $y - \lfloor y \rfloor$; aquí $\lfloor y \rfloor$ representa el "suelo" del número y, es decir, el mayor de todos los enteros n que satisfacen $n \leq y$. Nótese que esta última expresión vale cero si y sólo si y es un entero, es decir, si (x, x+1, y) es un triple pitagórico consecutivo. Empleando una calculadora TI-83 para generar tal tabla se obtienen pantallas como las que se muestran a continuación.

En la tabla se aprecian los primeros dos triples pitagóricos (0, 1, 1) y (3, 4, 5). Como ya se ha indicado, para identificar los triples pitagóricos consecutivos en la tabla, basta con solo examinar la columna Y_2 (= $y - \lfloor y \rfloor$) para detectar la aparición de "ceros" (los valores de la columna Y_2 que corresponden a los valores 0 y 3 de X (= x) valen cero). Si examinamos la tabla a medida que tomamos valores progresivos de X, podremos constatar que el próximo cero ocurre para el valor de X = 20. El triple pitagórico correspondiente es entonces (20, 21, 29).

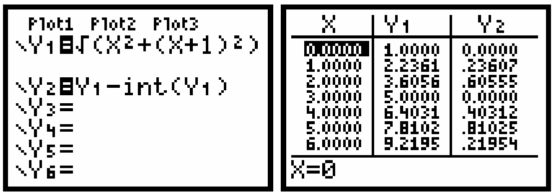

Figura 1: Tabla para generar triples pitagóricos consecutivos

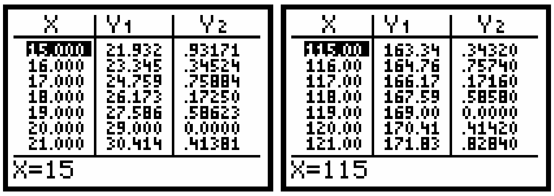

Figura 2: Otros triples pitagóricos consecutivos

Luego la exploración se hace un tanto más tediosa, pero con un poco de paciencia llegamos al valor x = 119 para obtener el próximo triple pitagórico, a saber, (119, 120, 169). La siguiente tabla muestra el progreso alcanzado hasta el momento:

x	x+1	y
0	1	1
3	4	5
21	22	30
119	120	169

Figura 3: Inicio de una tabla de triples pitagóricos consecutivos

Una observación interesante sobre este problema se relaciona con los cocientes sucesivos de los valores de x o los valores de y. Por ejemplo, los cocientes consecutivos de los valores de x son 21/3 = 7 y 119/21 ≅ 5.57, y los de los valores de y son 5/1 = 5, 30/5 = 6 y 169/30 ≅ 5.63. Resultados del mismo valor aproximado se obtienen cuando empleamos los triples pitagóricos que siguen al último de la tabla. Esta experimentación "inductiva" sugiere que el próximo triple pitagórico ocurre para un valor aproximado de x de 5.6 ∞ 119 ≅ 666. Si examinamos la tabla correspondiente que comienza con este valor de X y la continuamos examinando a medida que los valores de X aumentan, vemos que el próximo valor de cero en la columna de Y_2 ocurre para X = 696, es decir el próximo triple pitagórico es (696, 697, 985).

Podríamos continuar explorando de esta manera o escribir un pequeño programa para describir los próximos triples pitagóricos consecutivos de la tabla. En el programa (véase la Figura 5) se indica el último valor de x descubierto y el programa indica el próximo triple en la lista (empleando como dato que el próximo valor de x es del orden de 5.8 veces el valor anterior de x). Por ejemplo, sustituyendo el valor de x del último triple descubierto, x=119, obtenemos el triple (696, 697, 985); si luego sustituimos x=696, obtenemos a su vez el triple (4,059, 4,060, 5741), (véase la Figura 5).

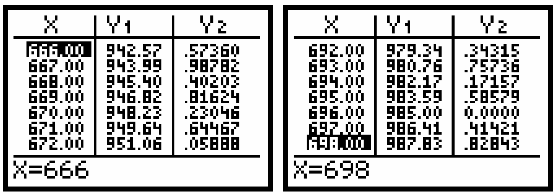

Figura 4: Triple pitagórico que sigue a (119, 120, 169)

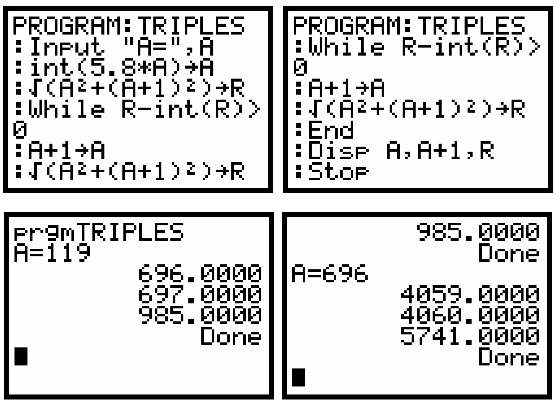

Figura 6: Programa para generar tiples pitagóricos consecutivos

Al obtener valores adicionales se puede extender la tabla anterior para obtener la tabla de la Figura 6. Como es de esperarse, los números en la primera columna crecen rápidamente. Es interesante notar de paso que en algunas calculadoras (como la que estamos empleando en los cálculos de este ejemplo[1]) la suma de los cuadrados de las primeras dos columnas de la tabla podría resultar en un número que no se puede representar exactamente en la ventanilla de la calculadora. En tal caso la calculadora revierte al formalismo numérico de la aritmética de punto flotante; véase la Figura 7. Invitamos al lector a hallar el próximo triple pitagórico de la tabla.

Estrategias heurísticas de búsqueda de relaciones entre los números de la tabla revelan datos muy interesantes. Se puede notar, por ejemplo, que tres veces primera entrada de un triple pitagórico más dos veces la segunda es aproximadamente la primera entrada del triple que sigue. Una relación similar aplica a la tercera entrada del triple pitagórico que sigue. Algunos estudiantes que han considerado este problema terminan dando con una relación recursiva para generar la sucesión de los triples pitagóricos consecutivos $(a_n, a_n + 1, b_n) \quad (n \geq 0)$:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 0 \quad b_0 = 1 \\
&a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1 \qquad\qquad (1) \\
&b_{n+1} = 4a_n + 3b_n + 2
\end{aligned}
$$

x	x+1	y
0	1	1
3	4	5
21	22	30
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025

Figura 6: Triples pitagóricos consecutivos adicionales

[1] TI-83

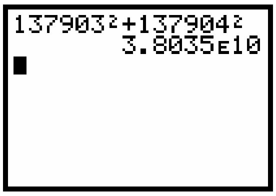

Figura 7: Calculadora que revierte a aritmética de punto flotante

Preguntas naturales que surgen de la experimentación en este problema son las relacionadas al comportamiento asintótico de los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n y (es decir, ¿cómo se comportan tales cocientes cuando n se hace grande?) a_n/b_n. De las relaciones anteriores es fácil ver que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n/b_n + 2 + 1/b_n}{4a_n/b_n + 3 + 2/b_n}. \qquad (2)$$

Ahora sabemos por (1) que hay un número infinito de triples pitagóricos consecutivos. Por consiguiente, $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si suponemos que a_n/b_n se acerca (como parece) a un número x, entonces se obtiene de (2) que

$$x = \frac{3x+2}{4x+3}. \qquad (3)$$

La solución positiva de (3) es x = $1/\sqrt{2}$. El lector puede verificar que los valores sucesivos de a_n/b_n se aproximan en efecto a .707107$\approx 1/\sqrt{2}$. Empleando nuevamente (1), el lector podrá verificar que a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n ambos se aproximan a $3+2\sqrt{2} \approx$ 5.82.

Una dimensión particularmente interesante de este problema surge luego de observar que la recursión indicada anteriormente se puede escribir en "forma matricial". En efecto, en el estudio de otra sucesión famosa, la de Fibonacci, la expresión matricial es muy reveladora. Recordamos al lector que la sucesión de Fibonacci se define recursivamente como:

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 0)$$

Entre los adeptos al estudio de esta sucesión (quienes son muchos como lo atestigua la cantidad impresionante de publicaciones en la forma de artículos y revistas sobre el tema) se conoce muy bien el procedimiento que pasamos a describir muy someramente. Note que la recursión anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0).$$

Ahora hacemos una breve disgresión para discutir algunos datos sobre la diagonalización de matrices. En esta discusión supondremos que el lector está familiarizado con operaciones de suma y multiplicación de matrices y con el cálculo de determinantes para matrices 2∞2. Además, en la discusión que sigue sólo trataremos el caso de las matrices 2∞2 y supondremos también que el lector sabe cómo hallar la matriz inversa de una matriz dada (cuando existe). La matriz identidad (2∞2) con respecto a la multiplicación esta dada por la matriz definida por:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por definición la matriz A es *diagonalizable* si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal, es decir, una matriz para la cual todas las entradas son ceros, con la posible excepción de las entradas de la diagonal principal. En símbolos, una matriz 2∞2 es diagonalizable si y sólo si existe una matriz D tal que $P^{-1}AP = D$ y D es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

para números reales (o complejos) d_1, d_2. Una gran ventaja de las matrices diagonales es la facilidad con la que se pueden elevar a potencias enteras. En efecto si D es como la última matriz indicada, entonces para todo entero no-negativo n,

$$D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix}.$$

Dejamos al lector la verificación de este dato. En particular, si n es un entero no-negativo, tenemos

$$\begin{aligned}\left(P^{-1}AP\right)^n &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)..\left(P^{-1}AP\right) \quad \text{(n veces)} \\ &= P^{-1}A^nP\end{aligned}.$$

Pon consiguiente si A es diagonalizable y P es la matriz invertible de la definición, entonces, para todo entero no-negativo n, tenemos:

$$D^n = P^{-1}A^nP.$$

Tenemos pues en este caso que $A^n = PD^nP^{-1}$, de manera que las potencias de A son también, después de todo, fáciles de calcular.

Ahora recordamos al lector que el determinante tiene la propiedad multiplicativa: si A y B son matrices cuadradas det(AB)=det(A).det(B). (Aquí, como el lector seguramente sospecha, det(A) representa el determinante de la matriz A.) En particular, si A es invertible, entonces det(A)≠0 (¡la matriz cero!) y $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Entonces si A es diagonalizable y P es como en la definición tenemos, para todo número x,

$$\begin{aligned}\det(A - xI) &= \det(PDP^{-1} - xI) \\ &= \det(P(D - xI)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(D - xI)\det(P)^{-1} \\ &= \det(D - xI) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} d_1 - x & 0 \\ 0 & d_2 - x \end{pmatrix} \\ &= \left(d_1 - x\right)\left(d_2 - x\right)\end{aligned}$$

Note primeramente que det(A-xI) es un polinomio de grado 2 y que los números d_1 y d_2 no son sino las raices este polinomio, Decimos que el polinomio indicado es el *polinomio característico* de A y que las raíces d_1 y d_2 son sus *valores propios* o *eigenvalores* de A.

Desde luego, en la práctica, cuando no sabemos si una matriz es diagonalizable, comenzamos por examinar el polinomio característico de la misma para hallar los autovalores y luego, empleando tales autovalores, tratamos de determinar una matriz P que diagonalice a la matriz dada. Para ello, primeramente tratamos de descubrir vectores (en este caso una matrices 2∞1), distintos de cero (es decir, con alguna entrada distinta de cero)

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix},$$

tal que

$$A\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = d_1\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \text{ y } A\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = d_2\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

Si los vectores que se han conseguido mediante el procedimiento descrito son especiales (en el sentido que ninguno de ellos se obtiene del otro mediante multiplicación por algún número), entonces la matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

es invertible y es fácil verificar que

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 p_{11} & 0 \\ d_1 p_{21} & 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 & d_2 p_{12} \\ 0 & d_2 p_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 p_{11} & d_2 p_{12} \\ d_1 p_{21} & d_2 p_{22} \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.

Si D es la matriz diagonal de la derecha, esto prueba que $AP = PD$ y de aquí se obtiene $P^{-1}AP = D$.

Desde luego, hay criterios para decidir cuándo una matriz es diagonalizable, pero la discusión del tema nos llevaría muy lejos de la senda que deseamos seguir en este momento. Referimos al lector a las referecias sobre algebra lineal que aparecen al final de este escrito.

Ahora regresamos al la discusión de la matriz empleada para escribir en forma matricial la sucesión de Fibonacci. Curiosamente los valores propios que se emplean para diagonalizar la matriz indicada son las famosas constantes "áureas" que aparecen en la formula directa para generar la sucesión de Fibonacci:

$$\mu = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \quad \nu = \left(1-\sqrt{5}\right)/2 \quad \text{y} \quad f_n = \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \quad (n \geq 0).$$

En el caso de la recursión de los triples pitagóricos tenemos ($a_0 = 0 \quad b_0 = 1$):

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n \geq 0). \qquad (1)$$

Nótese que en la recursión de los triples pitagóricos aparece un vector "constante". En este caso los valores propios de la matriz indicada están dados por $\mu = 3 + 2\sqrt{2})$ y $\nu = 3 - 2\sqrt{2}$; véase Figura 8. Los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n parecen aproximase a μ cuyo valor aproximado es de 5.82.

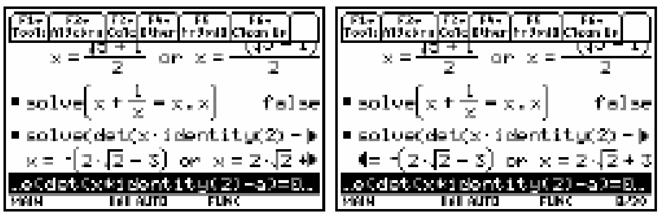

Figura 8

Los lectores interesados pueden verificar que la matriz

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

se puede diagonalizar, es decir, es posible hallar una matriz invertible **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP}$ es una matriz diagonal **D** cuyas entradas corresponden a los valores propios de **T**. En efecto una matriz **P** con tal propiedad se muestra a continuación; véase la Figura 8:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

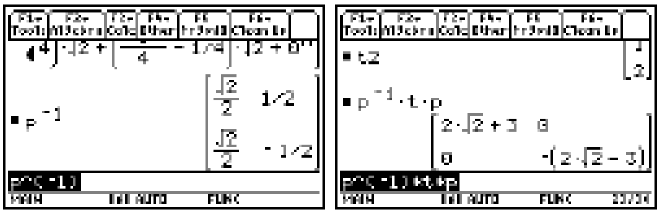

Figura 8

En la siguiente discusión emplearemos la notación,

$$\tau_{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_n} \\ \mathrm{b_n} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, en notación matricial la relación recursiva (1) se conviente en

$$\tau_{\mathrm{n}+1} = \mathbf{T}\,\tau_{\mathrm{n}} + \beta \qquad (2)$$

Empleando la relación recursiva (2) y un argumento inductivo es posible demostrar (dejamos los detalles al lector interesado; el lector puede imaginar que las matrices actúan como números reales (¡cuidado con la comutatividad!) para sumar las series geométricas que surgen sin miedo alguno) que para $n \geq 0$,

$$\tau_{\mathrm{n}} = \mathbf{PD}^{\mathrm{n}}\mathbf{P}^{-1}\tau_0 + \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{D}^{\mathrm{n}})\mathbf{P}^{-1}\beta$$

Calculando explícitamente esta expresión en la calculadora (véase Figura 9) tenemos

$$\tau_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n \left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\right) - \dfrac{1}{2} \\ \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \end{pmatrix}$$

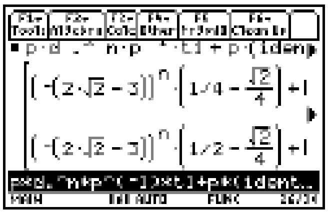

Figura 9

Esto nos da una fórmula explícita para los triples pitagóricos consecutivos (a_n, a_{n+1}, b_n) $(n \geq 0)$:

$$a_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

$$b_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$$

¡Mira a tu alrededor que las maravillas surgen en los lugares menos imaginados!

Algunas preguntas interesantes

1. Halle una matriz invertible P para la sucesión de Fibonacci tal que

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P \qquad (3)$$

   es una matriz diagonal. Emplee los valores de la diagonal para hallar una fómula explicita para la sucesión de Fibonacci (véase la página 9).
2. Será posible hallar más de una matriz P como en la pregunta anterior?

Referencias

Las actividades aquí descrita se han tomado de las siguientes fuentes:

Campistrous, L. A., López, J. M. (2001), La calculadora como herramienta heurística, Revista Uno, Número 28, páginas 84-99.

Lopez, J. M. (2002) Problemas de investigación matemática para la escuela secundaria, Fascículo de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM), Universidad de Puerto Rico, Río Piedras