LUGAR GEOMÉTRICO

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Se dan los siguientes puntos por sus coordenadas: A(3, 0), B(1, 0), C(0, 2) y sea P un punto variable sobre el eje $\overrightarrow{ox}$.

- *i)* Hallar la ecuación de la recta (AC) y de la recta (r) perpendicular a (AC) por P.
- *ii)* Sea P' simétrico de P respecto al origen. Hallar la ecuación de la recta (p) paralela a (AC) por P'
- *iii)* Lugar geométrico de $(p) \cap (r)$.

2) Se consideran los puntos A(2, 1) y B(3, 0). Por A se traza la recta (r) variable. Y por B la recta (p) perpendicular a (r).

- *i)* Hallar el lugar geomérico de $(r) \cap (p)$ y sus elementos.
- *ii)* Verificar que el punto P(2, 0) pertenece al lugar hallado.

3) Se dan los puntos fijos A(1, 0) y B(0, 2), y un punto P variable, perteneciente al eje $\overrightarrow{oy}$. Por P se traza (r), recta perpendicular a (AB) que corta al eje $\overrightarrow{ox}$ en N. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de la recta (AP) y (BN).

4) Dados los puntos fijos A(3, 0) y B(– 1, 0) y la recta (r) $x = 1$. Sea (t) la familia de rectas de ecuación $y = \lambda$ que intercepta al eje $\overrightarrow{oy}$ en el punto P y a la recta (r) en Q. Hallar el lugar geométrico de $(PA) \cap (BQ)$ al variar $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Se dan las rectas (r) $y + 3x = 0$ y (p) $2y = x$. Se consideran las rectas (s) variables paralelas a $y = -x$; las que cortan a (r) en el punto R y a (p) en el punto P. Por R se traza la paralela (t) a la recta $y = x$. Por P se traza la paralela (q) a la recta $y = 2x$. Hallar el lugar geométrico de $(t) \cap (q)$.

6) Sea (r) la familia de rectas de ecuación: $y = \lambda x$. Por A(2, 4) se trazan las rectas (t) paralelas a (r), y por el origen de coordenadas las rectas (p) perpendiculares a (t).

- *i)* Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de (t) y (p) al variar $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *ii)* Sea (s) la familia de rectas de ecuación $x + 2y - \lambda = 0$. El punto B la intersección de (t) y el eje $\overrightarrow{oy}$, y (b) la recta paralela al eje $\overrightarrow{ox}$ por B. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de (b) con (s) al variar $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *iii)* Hallar los puntos C y D de interceptar ambos lugares geométricos.

7) Sea A(3, 0) y (r) la ecuación de una recta variable de coeficiente angular m y tal que $A \in (r)$, (r) corta al eje $\overrightarrow{oy}$ en el punto J y, a la recta de ecuación: $y = x$ en el punto K. G es la proyección de K sobre el eje $\overrightarrow{ox}$.

- *i)* Probar que la recta (GJ) pasa por un punto fijo al variar $m \in \mathbb{R}$ y hallarlo.
- *ii)* Por A se traza la recta (s) perpendicular a (GJ). Hallar la ecuación del lugar geométrico de $(s) \cap (GJ)$ al variar $m \in \mathbb{R}$.
  Reconocer y dar elementos.

8) Sea: (r) la familia de rectas de ecuación: $\lambda x+(\lambda-2)y+4-\lambda=0$
(s) la familia de rectas de ecuación: $(2-\lambda)x+\lambda y+6-\lambda=0$

i) Probar que (r) pasa por un punto fijo al variar $\lambda\in\mathbb{R}$ y hallarlo.

ii) Probar que (s) pasa por un punto fijo al variar $\lambda\in\mathbb{R}$ y hallarlo.

iii) Hallar la ecuación del lugar geométrico de $(r)\cap(s)$ al variar $\lambda\in\mathbb{R}$ reconocer y hallar elementos.

9) Sea: (r) la familia de rectas de ecuación: $(2+\lambda)x+\lambda y-6-4\lambda=0$

i) Probar que (r) pasa por un punto fijo al variar $\lambda\in\mathbb{R}$ y hallarlo.

ii) Por $A(5,3)$ se traza (s) perpendicular a (r), $(r)\cap(s)=\{R\}$
Hallar la ecuación del lugar geométrico de R al variar $\lambda\in\mathbb{R}$.
Reconocer y hallar elementos.

10) *i)* Hallar la ecuación de la circunferencia (C) que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(-1,0)$ y $C(3,-3)$.

ii) Se considera el punto R de intersección de (C) con $\vec{ox}$, $(R\neq B)$. Se trazan las rectas: (s) variable por A, y (t) perpendicular a (s) por R. Hallar el lugar geométrico del punto M de intersección de las rectas (s) y (t).

11) Dadas las siguientes circunferencias por sus ecuaciones:

$(C1)$ $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ $(C2)$ $x^2+y^2+4x+6y+5=0$

i) Obtener los punto de intersección H y J (H mayor abscisa que J) de las circunferencias $(C1)$ y $(C2)$.

ii) Sea (r) una recta variable por H. El punto F esta determinado por la intersección de (r) y la recta (s) $x+y=0$. Hallar el lugar geométrico de M punto medio entre F y J.

12) *i)* Hallar la ecuación de la familia de circunferencias (C_λ) que contiene a los puntos $O(0,0)$, $A(4,0)$ y $B(0,\lambda)$ al variar $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Sea (t) la tangente a las circunferencias (C_λ) en el origen de coordenadas y, (s) la tangente a las circunferencias (C_λ) en A.
Hallar y reconocer el lugar geométrico de la intersección de (s) y (t) al variar $\lambda\in\mathbb{R}$.

iii) Sea (r) la tangente a las circunferencias (C_λ) en B, hallar y reconocer el lugar geométrico de la intersección de (r) y (t) al variar $\lambda\in\mathbb{R}$.

13) Se da la familia de curvas por la ecuación $x^2+y^2-4\sqrt{3}\,x-2\lambda^2y+6\lambda^2-9=0$

i) Probar que son circunferecnias para todo $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Hallar el lugar geométrico de los centros.

14) Dada la ecuación (C_m) $x^2 + y^2 + \left(\frac{6-2m}{m+1}\right)x + \left(\frac{4-4m}{m+1}\right)y - 12 = 0$

i) Probar que (C_m) es un haz de circunferencias y hallar sus puntos bases.

ii) Hallar el lugar geométrico de los centros de (C_m).

iii) Hallar la ecuación de la circunferencia de que es ortogonal con: $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 10 = 0$

15) *i)* Hallar la ecuación de la circunferencia (C) que es tangente a la recta (r) $x + y - 5 = 0$ en el punto M(4, 1) y, cuyo centro C pertenece a la recta (n) $x + 2y = 0$.

ii) Sea A el punto de intersección de (C) con $\overrightarrow{oy}$, cuya ordenada es positiva y (t) la ecuación de la recta tangente a (C) en A; $(t) \cap \overrightarrow{ox} = \{B\}$. Calcular el área del triángulo OAB.

iii) Por 0(0, 0) se traza una recta (s) variable.
Y por C la recta (p) perpendicular a (s).
Hallar la ecuación del lugar geométrico de H, $\{H\} = (p) \cap (s)$.
Reconocer y hallar elementos.

16) *i)* Hallar la ecuación de la parábola (P) de foco $F\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ y vértice $V(-1,0)$.

ii) P es un punto variable perteneciente a la tangente a (P) en V.
Por P se traza una recta paralela al eje de (P), que corta a (P) en M.
Sea (s) la recta perpendicular a (VM) trazada por P.
Probar que las rectas (s) forman haz y hallar las coordenadas de su centro.

iii) Sea $Q / \{Q\} = (s) \cap (VM)$, hallar la ecuación del lugar geométrico de Q.
Reconocerlo y hallar elementos.

17) *i)* Dada la circunferencia (C) $x^2 + y^2 + \mathbf{a}x = 0$, determinar $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ de modo que la recta (t) de ecuación $x + \sqrt{3}\,y - 6 = 0$ sea tangente a la misma.

ii) Sea (C_o) la ecuación obtenida para el mayor valor de **a** hallado en la primera parte. Se considera una recta (r) variable por O(0,0) y el punto K simétrico de O respecto al otro punto de intersección de (r) y (C_o)
Sean los puntos $C(-6, 0)$ y $H(-12, 0)$ Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de la perpendicular (p) por H a (r), y la recta (s) determinada por C y K . Reconocer.

18) *i)* Hallar la ecuación de la parábola (P) de eje || a $\overrightarrow{oy}$, que pasa por O(0,0), $A(\lambda,0)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la recta de ecuación $y = x$.

ii) Hallar la ecuación de la parábola (P'), de eje || a $\overrightarrow{oy}$, tangente a $\overrightarrow{ox}$ en A; de $d(F,V) = \frac{1}{4}$ y concavidad positiva.

iii) Hallar las coordenadas del otro punto B de intersecciÓn de (P) y (P').

iv) Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de la recta (OB) con la || a $\overrightarrow{oy}$ que pasa por A.
Reconocer y hallar elementos.

EJEMPLO Se considera un punto P variable sobre la circunferencia
$(C)\ x^2+y^2-x-2y-20=0$

En este caso en que las coordenadas x e y están elevadas a dos potencias diferentes, es imprescindible introducir dos parámetros variables y el punto será $P(\lambda, \gamma)$ pero sabiendo que por pertenecer a la circunferencia se verifica que: . $\lambda^2+\gamma^2-\lambda-2\gamma-20=0$
Ecuación que relaciona los dos parámetros variables.

19) *i)* Hallar la ecuación de la circunferencia (C) que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, 1)$ y tiene centro en la recta de ecuación: $x+y-3=0$

ii) Sea $P(\lambda, \gamma)$ un punto variable en (C). El punto Q es tal que A es punto medio de $[P,Q]$. (r) es la recta paralela al eje $\overrightarrow{ox}$ que pasa por Q. (s) es la recta paralela a (OP) por el punto A. Hallar la ecuación del lugar geométrico de $(r)\cap(s)$. Reconocer y hallar elementos.

RESULTADOS: EJERCICIOS DE LUGAR GEOMÉTRICO

1) (AC) $2x + 3y - 6 = 0$ (r) $-3x + 2y + 3\lambda = 0$ (p) $2x + 3y + 2\lambda = 0$ Lugar $12x + 5y = 0$

2) (r) $mx - y - 2m + 1 = 0$ (p) $x + my - 3 = 0$

Lugar $x^2 + y^2 - 5x - y + 6 = 0$ circunferencia de centro $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio = $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3) (r) $-x + 2y - 2\lambda = 0$ $N(-2\lambda, 0)$ (AP) $\lambda x + y - \lambda = 0$ (BN) $-x + \lambda y - 2\lambda = 0$

Lugar $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y radio = $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4) $P(0, \lambda)$ $Q(1, \lambda)$ (PA) $\lambda x + 3y - 3\lambda = 0$ (BQ) $\lambda x - 2y + \lambda = 0$
Lugar $5xy - 3y = 0$, si $\lambda = 0$ lugar $y = 0$, si $\lambda \neq 0$ lugar $5x - 3 = 0$

5) (s) $y = -x + n$ $R\left(\frac{-n}{2}, \frac{3n}{2}\right)$ $P\left(\frac{2n}{3}, \frac{n}{3}\right)$ (t) $y = x + 2n$ (q) $y = 2x - n$ Lugar $-5x + 3y = 0$

6) (t) $\lambda x - y - 2\lambda + 4 = 0$ (p) $x + \lambda y = 0$ *i)* Lugar $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

ii) $B(0, 4 - 2\lambda)$ (b) $y = 4 - 2\lambda$ (s) $x + 2y - \lambda = 0$ Lugar $2x + 5y - 4 = 0$ *iii)* (2,0) $\left(-\frac{32}{29}, \frac{36}{29}\right)$

7) (r) $mx - y - 3m = 0$ $J(0, -3m)$ $K\left(\frac{3m}{m-1}, \frac{3m}{m-1}\right)$ $G\left(\frac{3m}{m-1}, 0\right)$

i) (GJ) $(m - 1)x - y - 3m = 0$ Punto fijo $(3, -3)$

ii) (s) $x + (m - 1)y - 3 = 0$ lugar: $x^2 + y^2 - 6x + 3y + 9 = 0$

8) *i)* $(-1, 2)$ *ii)* $(-3, -2)$ *iii)* Lugar $x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$ circunferencia de centro $(-2, 0)$ y $r = \sqrt{5}$

9) *i)* (3, 1) *ii)* (s) $(y - x + 2)\lambda + 2y - 6 = 0$

Lugar $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 18 = 0$ circunferencia de centro (4, 2) y $r = \sqrt{2}$

10) *i)* $7x^2 + 7y^2 - 17x + 17y - 24 = 0$

ii) $R\left(\frac{24}{7}, 0\right)$ (s) $mx - y + 1 = 0$ (t) $7x + 7my - 24 = 0$ lugar de M: $7x^2 + 7y^2 - 24x - 7y = 0$

11) *i)* $H(0, -1)$ $J(-4, -1)$ *ii)* $F\left(\frac{1}{m+1}, -\frac{1}{m+1}\right)$ $M\left(\frac{-4m-3}{2m+2}, \frac{-m-2}{2m+2}\right)$ Lugar $2x + 2y + 5 = 0$

12) *i)* $x^2 + y^2 - 4x - \lambda y = 0$ *ii)* (t) $4x + \lambda y = 0$ (s) $4x - \lambda y - 16 = 0$
Lugar $xy - 2y = 0$ $y = 0$ es un caso particular, al simplificar queda: $x - 2 = 0$ (recta vertical)

iii) (r) $-4x + \lambda y - \lambda^2 = 0$

Lugar $x(y^2 + 2x) = 0$ $x = 0$ es un caso particular, al simplificar queda: $y^2 + 2x = 0$ Parábola de vértice en (0, 0)

13) *i)* $r = \sqrt{\lambda^4 - 6\lambda + 21} > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *ii)* lugar $x = 2\sqrt{3}$

14) *i)* $(2, -2)$ $(-3, 3)$ *ii)* $x - y + 1 = 0$ *iii)* (C') $3x^2 + 3y^2 - 4x - 10y - 36 = 0$

15) *i)* (*C*) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ *ii)* A(0, 1) (t) $-x + y - 1 = 0$ $B(-1, 0)$ área $= \frac{1}{2}$

iii) (s) $-mx + y = 0$ (p) $x + my + m - 2 = 0$ lugar de H: $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$

circunferencia de centro $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

16) *i)* (*P*) $3x + y^2 + 3 = 0$ *ii)* (VM) $3x + \lambda y + 3 = 0$ (s) $\lambda x - 3y + 4\lambda = 0$ haz con centro en $(-4, 0)$

iii) Lugar de (Q) $x^2 + y^2 + 5x + 4 = 0$ circunferencia $C\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ radio $= \frac{3}{2}$

17) *i)* a = 12 a = – 4 *ii)* (C_o) $x^2 + y^2 + 12x = 0$ (r) $y = mx$ $M\left(\dfrac{-12}{m^2+1}, \dfrac{-12m}{m^2+1}\right)$ $K\left(\dfrac{-24}{m^2+1}, \dfrac{-24m}{m^2+1}\right)$

(p) $my + x + 12 = 0$ (s) $(m^2 - 3)y + 4m(x + 6) = 0$ Lugar: $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$ circunferencia C(– 8, 0)

18) *i)* *(P)* $\lambda y + x^2 - \lambda x = 0$ *ii)* *(P')* $y - x^2 + \mathbf{2}\lambda x - \lambda^2 = 0$ *iii)* $B\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda+1}, \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\right)$

iii) Lugar geométrico $xy + y - x = 0$ Hipérbola equilátera de centro (– 1, 1) $a = \sqrt{2}$

19) *i)* (C) $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$ *ii)* Lugar: $x^2 + y^2 + 7x + 3y = 0$