DETERMINANTES

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular los siguientes determinantes:

$i)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad ii)\ \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad iii)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$iv)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad v)\ \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad vi)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ hallar **a** si det(A) = 10

3) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} a+\frac{1}{2} & -3 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ hallar **a** si det(B) = 0

4) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a+2 & 2a & a \\ 2 & -a & 1 \end{pmatrix}$ hallar **a < 0** si det(C) = -2

5) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & a-4 \end{pmatrix}$

hallar **a** si det(A) $\times$ det(B) = 15a

6) Menciones las propiedades utilizadas para probar que los siguientes determinantes valen cero.

$i)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad ii)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix}$ $\quad iii)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}$ $\quad iv)\ \begin{vmatrix} a & ab & 3b \\ 2ab & a^2 & 6b^2 \\ a^2 & b^2 & 3ab \end{vmatrix}$

7) Sabiendo que: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ calcular los siguientes determinantes.

$i)\ \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad ii)\ \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8) Calcular los siguientes determinantes aplicando propiedades.

$$ii)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad ii)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

9) Menciones las propiedades utilizadas para obtener las igualdades:

$$i)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} \qquad ii)\ \begin{vmatrix} 4 & -18 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$iii)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

10) Sin desarrollar los determinantes decir si son ciertas las igualdades planteadas y justificar la respuesta.

$$i)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a+x & 2b+y & 2c+z \end{vmatrix} = 0 \qquad ii)\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b & 3c \\ 2x & y & 3z \\ 2p & q & 3r \end{vmatrix}$$

11) Resolver en los números reales:

$$i)\ \begin{vmatrix} x^2-4 & 4x+4 \\ x-2 & 8x+8 \end{vmatrix} = 0 \qquad ii)\ \begin{vmatrix} x^2-4 & x-3 & 3x \\ x-2 & x^2-9 & x^2 \\ -2x+4 & x-3 & 5x \end{vmatrix} = 0$$

$$iii)\ \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x-2 \\ 3x-9 & x-3 & 2x-6 \end{vmatrix} = 0 \qquad iv)\ \begin{vmatrix} (x-1) & (x^2-1) & 1 \\ (x-2) & (x^2-2) & -2 \\ (x-3) & (x^2-3) & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$v)\ \begin{vmatrix} x^2-4 & x^2-5x+6 & x^2-3x+2 \\ x & 2x-6 & 3x-3 \\ 5 & x-3 & 4x-4 \end{vmatrix} = 0$$

12) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & x-1 & -x \\ 2 & 1-x & x \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x-2 & 1-x \\ 2-x & 2x-2 \\ 2x-4 & x-1 \end{pmatrix}$

i) Hallar la matriz **A.B**

ii) Resolver **det(A.B) =** $\mathbf{5x^2 - 15x + 10}$

13) Calcular los siguientes determinantes:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ *ii)* $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *iii)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ *v)* $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *vi)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

14) Para que valores de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ existe la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$A = \begin{pmatrix} 3a+1 & a+1 \\ 5a+3 & 4a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & -a \\ -2 & 1 & a-1 \\ -1 & 3 & a-4 \end{pmatrix}$

15) Indicar cuáles de las siguientes matrices tienen inversa y en caso de que existan, hallarlas.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

16) Resolver y discutir según $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ los siguientes sistemas aplicando el método de Cramer.

i) $\begin{cases} mx - y = m+1 \\ 2mx + my = -3 \end{cases}$ *ii)* $\begin{cases} (m-1)x - y = m \\ (m-2)x + 2y = -m \end{cases}$

iii) $\begin{cases} (m-3)x + (m+3)y = m \\ (m-3)x + 2y = 2m+1 \end{cases}$ *iv)* $\begin{cases} (2m-1)x + (2m+1)y = -1 \\ (-2m+1)x + (m^2-1)y = m+1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 3x + my = -2m \\ (5+m)x - 2y = 5 \end{cases}$

17) Resolver y discutir según **a**$\in\mathbb{R}$ los siguientes sistemas aplicando el método de Cramer.

$$i)\ \begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x + az = 1 \\ 2y + z = a \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} ax + y - z = 3 \\ x + y - az = 2a \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + y + 2z = 17 \\ x + ay + az = 7 \end{cases}$$

RESULTADOS: DETERMINANTES

1) *i)* 26 *ii)* – 18 *iii)* 87 *iv)* 1 *v)* – 142 *vi)* – 5

2) $\{-5, 2\}$ **3)** $\left\{\frac{3}{2}, -2\right\}$ **4)** $\{-1\}$ **5)** $\left\{-\frac{5}{3}, 0, 3\right\}$

6)
i) Si una línea esta formada por ceros, el determinante vale cero
ii) La tercera fila es igual a la primera multiplicada por –2.
iii) La tercera columna es igual a la primera multiplicada por 4.
iv)) En la tercera columna saco 3b y en la primera columna a, resultan dos columnas iguales.

7) *i)* 3 *ii)* 1

8)
i) Vale cero, tiene dos filas iguales.
ii) Vale cero, porque la primer columna es combinación lineal de la tercera por (-1) más la segunda.

9)
i) Si se intercambian dos filas (la tercera y la segunda) de lugar, el determinante cambia de signo.
ii) Un número por un determinante es igual al número por todos los elementos de una fila.
iii) Primero se cambio de lugar la fila tres con la fila dos, y luego se cambio de lugar la fila dos con la fila uno.

10)
i) Si porque la tercer fila es combinación lineal de la primera y segunda.
ii) Si porque un número por un determinante es igual al número por todos los elementos de una fila o de una columna.

11) *i)* $\left\{-\frac{3}{2}, -1, 2\right\}$ *ii)* $\{0, 2, 3\}$ *iii)* $\{-1, 1, 2{,}3\}$ *iv)* $\{0, 1\}$ *v)* $\left\{-\frac{15}{2}, 1, 2, 3\right\}$

12) *i)* $\begin{pmatrix} -2x^2+5x-2 & -2x+2 \\ 3x^2-5x-2 & -x^2+x \end{pmatrix}$ *ii)* $\left\{-3, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

13) *i)* 44 *i)* 44 *ii)* – 330 *iii)* – 748 *iv)* $a^4 - 6a^2 + 8a - 3$
v) $\mathbf{z} - 1$ *vi)* 4

14) A tiene inversa $\forall\ a \neq -\frac{3}{7},\ a \neq 1$. B tiene inversa $\forall\ a \neq -2,\ a \neq 1$. C tiene inversa $\forall\ a \neq 2,\ a \neq 3$

15) A no tiene inversa.

B tiene inversa, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ C tiene inversa, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

16) *i)* $\det(A) = m^2 + 2m$ $\det(A_x) = m^2 + m - 3$ $\det(A_y) = -2m^2 - 5m$

$\rightarrow$ El sistema es compatible determinado $\forall\ m \neq 0,\ m \neq -2$,

con solución: $x = \dfrac{m^2+m-3}{m^2+2m}$ $y = \dfrac{-2m-5}{m+2}$

$\rightarrow$ El sistema es incompatible si $m = 0,\ m = -2$

ii) $\det(A) = 3m - 4$ $\quad \det(A_x) = m$ $\quad \det(A_y) = -2m^2 + 3m$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ m \neq \frac{4}{3}$

con solución: $x = \dfrac{m}{3m-4}$ $\quad y = \dfrac{-2m^2+3m}{3m-4}$

→ El sistema es incompatible si $m = \frac{4}{3}$

iii) $\det(A) = -m^2 + 2m + 3$ $\quad \det(A_x) = -2m^2 - 5m - 3$ $\quad \det(A_y) = m^2 - 2m - 3$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ m \neq -1,\ m \neq 3$,

con solución: $x = \dfrac{2m+3}{m-3}$, $\quad y = -1$

→ El sistema es compatible indeterminado si $m = -1$. Tiene un grado de libertad,

con solución: $x \in \mathbb{R}$, $\quad y = \dfrac{4x-1}{2}$

→ El sistema es incompatible si $m = 3$

iv) $\det(A) = 2m^3 + 3m^2 - 2m$ $\quad \det(A_x) = -3m^2 - 3m$ $\quad \det(A_y) = 2m^2 - m$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ m \neq 0,\ m \neq -2,\ m \neq \frac{1}{2}$

con solución: $x = \dfrac{-3m-3}{2m^2+3m-2}$ $\quad y = \dfrac{1}{m+2}$

→ El sistema es compatible indeterminado si $m = 0$. Tiene un grado de libertad,
con solución: $x \in \mathbb{R}$, $\quad y = x - 1$

→ El sistema es incompatible si $m = -2,\ m = \frac{1}{2}$

v) $\det(A) = -m^2 - 5m - 6$ $\quad \det(A_x) = -m$ $\quad \det(A_y) = 2m^2 + 10m + 15$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ m \neq -3,\ m \neq -2$,

con solución: $x = \dfrac{m}{m^2+5m+6}$, $\quad y = \dfrac{-2m^2-10m-15}{m^2+5m+6}$

→ El sistema es incompatible si $m = -3,\ m = -2$,

17) *i)* $\det(A) = -4a$ $\det(A_x) = a^3 - 5a$ $\det(A_y) = -a^2 - 3$ $\det(A_z) = -2a^2 + 6$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ a \neq 0$, ,

con solución: $x = \dfrac{a^2-5}{-4}$, $\quad y = \dfrac{-a^2-3}{-4a}$, $\quad z = \dfrac{-2a^2+6}{-4a}$

→ El sistema es incompatible si $a = 0$

ii) det(A) = $a^2 - 2a + 1$ det(A_x) = $-3a + 3$ det(A_y) = $4a^2 - a - 3$ det(A_z) = $-2a^2 + 8a - 6$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ a \neq 1$, ,

con solución: $x = \frac{-3}{a-1}$, $y = \frac{4a+3}{a-1}$, $z = \frac{-2a+6}{a-1}$

→ El sistema es incompatible si a = 1

iii) det(A) = $a + 1$ det(A_x) = $12a + 7$ det(A_y) = $7a - 13$ det(A_z) = $-7a + 8$

→ El sistema es compatible determinado $\forall\ a \neq -1$,

con solución: $x = \frac{12a+7}{a+1}$, $y = \frac{7a-13}{a+1}$, $z = \frac{-7a+8}{a+1}$

→ El sistema es incompatible si a = – 1