

## EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1)** Sea  $P$  un punto variable en la recta  $(p)$   $x = 1$ . Sea  $(C)$  la circunferencia de centro  $A(3, 0)$  y que pasa por  $P$ .  $(t)$  la tangente a  $(C)$  en  $P$ .
- i)* Hallar la ecuación de la envolvente de  $(t)$  al variar  $P$ . Reconocer.
  - ii)*  $(AP) \cap (x = -1) = \{N\}$ ;  $(n)$  es paralela al eje  $\vec{ox}$  por  $N$ ;  $(n) \cap (t) = \{W\}$ . Demostrar que  $W$  es el punto de contacto de la recta  $(t)$  con la envolvente.
- 2)** Sea  $(r)$  una recta variable por el punto  $A(0, 2)$ ;  $(r) \cap \vec{ox} = \{J\}$ ;  $(C)$  es la circunferencia que pasa por  $A$ ,  $O$ , y  $J$ ;  $(t)$  es la tangente a  $(C)$  en  $\{J\}$ . Hallar la envolvente de  $(t)$  al variar  $(r)$ , reconocer y hallar elementos.
- 3)** Sea la hipérbola  $(H)$   $xy = 4$  de vértice  $V(2, 2)$ ;  $P$  un punto variable en  $(H)$ . Sea  $(C)$  la circunferencia de diámetro  $OP$ ;  $(C) \cap \vec{ox} = \{0, P'\}$ ;  $(C) \cap \vec{oy} = \{0, P''\}$ .
- i)* Hallar la ecuación de la envolvente de  $(P'P'')$ , reconocerla y hallar elementos.
  - ii)* Demostrar que  $(t)$  paralela a  $(P'P'')$  por  $P$  es tangente a  $(H)$ .
- 4)**
- i)* Hallar las ecuaciones de las parábolas  $(P)$  de directriz  $(d)$   $x + 1 = 0$ , que pasan por  $O(0,0)$
  - ii)* Lugar geométrico del vértice de  $(P)$ , reconocer y hallar elementos.
  - iii)* Lugar geométrico del foco de  $(P)$ , reconocer y hallar elementos.
  - iv)* Demostrar que al variar el parámetro las parábolas  $(P)$ , son tangentes a una cónica, hallar su ecuación, reconocerla y hallar sus elementos.
- 5)** Sea la familia de cónicas de ecuación:  $(C_\lambda)$   $\lambda^2 x^2 + (2 - 2\lambda)xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
- i)* Discutir género y naturaleza de  $(C_\lambda)$ , según  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - ii)* Probar en  $(C_\lambda)$ , hay una sola cónica degenerada y expresarla como el producto de dos rectas.
  - iii)* Hallar la ecuación de la envolvente de  $(C_\lambda)$ , reconocerla y hallar sus elementos principales.
  - iv)* Hallar el lugar geométrico de los centros de  $(C_\lambda)$ , reconocer.

**RESULTADOS: EJERCICIOS DE ENVOLVENTES**

- 1)  $(C_{\lambda}) x^2 + y^2 - 6x + 5 - \lambda^2 = 0$  (t)  $-2x + \lambda y + 2 - \lambda^2 = 0$  Envolverte:  $y^2 - 8x + 8 = 0$  Parábola.  
 (AP)  $\lambda x + 2y - 3\lambda = 0$  N(-1, 2λ) W( $\frac{\lambda+2}{2}$ , 2λ)
- 2)  $(C_m) x^2 + y^2 + \frac{2}{m}x - 2y = 0$  (t)  $m^2y + mx + 2 = 0$  Envolverte:  $x^2 - 8y = 0$  Parábola.
- 3)  $(C_m) x^2 + y^2 - \lambda x - \frac{4}{\lambda}y = 0$  (P'P")  $4x + \lambda^2y - 4\lambda = 0$  i) Envolverte  $xy = 1$
- 4) i)  $x = \left(\frac{b+1}{4}\right)y^2 + by$  ii)  $4x^2 + y^2 + 4x = 0$  iii)  $4x^2 + y^2 - 4x = 0$   
 iv)  $4x - y^2 + 4 = 0$
- 5) i)  $\lambda > \frac{1}{2}$  elipse real;  $\lambda = \frac{1}{2}$  parábola real;  $\lambda < \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq 0$  hipérbola real,  $\lambda = 0$  degenera en dos rectas.  
 ii)  $\lambda = 0$ , dos rectas:  $y = -2x + 2$ ,  $y = 2$   $(y + 2x - 2)(y - 2) = 0$   
 iii) (Envolverte)  $-xy + 2x + 2y - 2 = 0$  Hipérbola equilátera con centro en (2, 2)  
 iv) Lugar de los centros:  $x^2 + 2xy - 6x - 2y + 4 = 0$ , hipérbola.